МОСКОВСКОЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБЩЕСТВО

Институт общего и политехнического образования
Академии педагогических наук СССР

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ШКОЛА

ЛЕКЦИИ И ЗАДАЧИ

XIV

ИЗДАТЕЛЬСТВО МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА · 1968

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
им.М.В.ЛОМОНОСОВА

МОСКОВСКОЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБЩЕСТВО
ИНСТИТУТ ОБЩЕГО И ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО
ОБРАЗОВАНИЯ АКАДЕМИИ ПЕДАГОГИЧЕСКИХ НАУК
СССР

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ШКОЛА

ЛЕКЦИИ И ЗАДАЧИ

XIУ

Издательство Московского Университета
1968

В сборниках "Математическая школа" публикуются учебные материалы московских специализированных школ №№ 2, 7, 444, школы-интерната № 18 при МГУ и Вечерней математической школы при механико-математическом факультете МГУ. Материалы имеют экспериментальный характер. Руководит изданием редакционный совет в составе:

Э.Б.ВИНБЕРГ, Е.Б.ДЫНКИН, А.А.ЕГОРОВ, Т.И. КУЗНЕЦОВА (художник), М.М.РАББОТ (зам. редактора), С.И.ШВАРЦБУРД (редактор), И.М. ЯГЛОМ.

Содержание

Стр.

I. В школе № 2.
Е.Б.Дынкин. Курс математики в 8 классах (I семестр 1967-68 уч.г.). . . . . 3.

II. В вечерней математической школе
Конкурсные задачи. . . . . 41.

III. М.Дунская. XXX Московская математическая олимпиада. III тур . . . . . 44.

IУ. Материалы вступительных экзаменов. . . . . 63.

В ШКОЛЕ №2

КУРС МАТЕМАТИКИ В 8-ЫХ КЛАССАХ ШКОЛЫ № 2 (I семестр 1967-68 уч.г.)

Е.Б.ДЫНКИН

Тема I. Простейшие функции и их графики.

§ I. Линейные функции.

I. Вводные примеры. Стоимость телеграммы из x слов выражается формулой $10+3x$ копеек. Если лифт движется вверх равномерно со скоростью v и вначале его расстояние от земли равно h, то расстояние от земли через время t равно $h+vt$.

2. Определение. Выражение $ax+b$, где a и b — числа, называется линейной функцией (сокращенно, лф) от x. Если лф $ax+b$ обозначена буквой f, то число $ap+b$ называется значением f при $x=p$ и обозначается $f(p)$.

Например, если $f=2x+3$, то $f(-1)=2(-1)+3=1$.

3. Частные виды лф : а) $0\cdot x+b=b$ -константа, б) $ax+0=ax$ - прямая пропорциональная зависимость (од-

нородная лф).

4. График линейной функции – прямая.

§ 2. Преобразования линейных функций.

Из любой лф $f(x)=ax+b$ можно получить новые лф с помощью следующих преобразований:

а) сдвиг функции – $f(x)+h=ax+(b+h)$;

б) сдвиг аргумента – $f(x-m)=ax+(b-am)$;

в) растяжение функции – $kf(x)=(ka)x+kb$;

г) растяжение аргумента – $f\left(\frac{x}{e}\right)=\frac{a}{e}x+b$.

Геометрический смыол соответствующих преобразований графика.

§ 3. Сумма и суперпозиция линейных функций.

Пусть $f(x)=ax+b$, $g(x)=a'x+b'$. Их суммой называется лф

$$f(x)+g(x)=ax+b+a'x+b'=(a+a')x+(b+b');$$

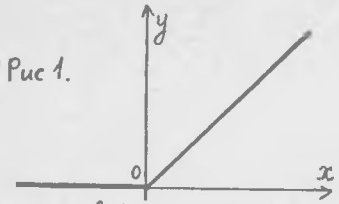
их суперпозицией называется лф $f[g(x)]=a(a'x+b')+b=(aa')x+(ab'+b)$. Обозначение $f\circ g$ для суперпозиции функций f и g . Некоторые овойства операции $f\circ g$ (коммутативность, ассоциативность).

§ 4. О функции $|x|$.

Определение функции $|x|$ и ее график. Наша функция состоит из кусков двух линейных функций, в этом омысле она "кусочно-линейна".

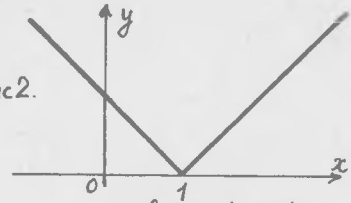
Примеры функций, которые можно строить с помощью известных нам операций из $|x|$:

Рис 1.



$f_1(x) = x + |x|$

Рис2.



$f_3(x) = |x-1|$

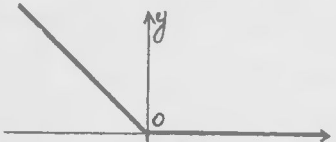


Рис. 3. $f_2(x) = |x| - x$

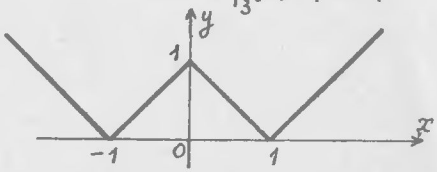


Рис 4. $f_4(x) = ||x| - 1|$

Все это кусочно-линейные функции.

§ 5. Кусочно-линейные функции.

Говорят, что задана кусочно-линейная функция (КЛФ), если вся числовая прямая разбита на конечное число отрезков и на каждом отрезке задана линейная функция, причем в общем конце двух соседних отрезков линейные функции, определенные на этих отрезках, имеют одинаковые значения. Графиком клф является ломаная.

Физический смысл кусочно-линейной функции (прямолинейное движение, при котором скорость меняется конечное число раз).

При сдвиге или растяжении функции или аргумента из клф получается снова клф с тем же числом звеньев. При сложении и суперпозиции двух клф также получается клф.

§ 6. Операции $\wedge$ и $\vee$.

Наименьшее из чисел a и b обозначается $a \wedge b$, а наибольшее – через $a \vee b$. Свойства этих операций:

$(a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c)$, $(a \vee b) \vee c = a \vee (b \vee c)$ (ассоциативность);

$a \wedge b = b \wedge a$, $a \vee b = b \vee a$ (коммутативность);

$(a \wedge b) \vee c = (a \vee c) \wedge (b \wedge c)$ (дистрибутивность $\wedge$ относительно $\vee$);

$(a \vee b) \wedge c = (a \wedge c) \vee (b \wedge c)$ (дистрибутивность $\vee$ относительно $\wedge$)

Сходство и различия с операциями сложения и умножения.

Замечаем, что

$$(a \vee b) + (a \wedge b) = a + b,$$

$$(a \vee b) - (a \wedge b) = |a - b|.$$

Складывая и вычитая эти равенства, приходим к следующим выражениям $a \vee b$ и $a \wedge b$ через функцию $|x|$:

$$a \vee b = \frac{1}{2}[a + b + |a - b|], \quad a \wedge b = \frac{1}{2}[a + b - |a - b|].$$

Если f_1 и f_2 - лф, то $f_1 \wedge f_2$ и $f_1 \vee f_2$ либо лф, либо клф из двух звеньев. Если f_1 и f_2 - клф, то $f_1 \wedge f_2$ и $f_1 \vee f_2$ также являются клф. Таким образом из линейных функций с помощью операций $\wedge$ и $\vee$ можно получать кусочно-линейные функции с любым числом звеньев.

§ 7. Как записать кусочно-линейную функцию одной формулой?

Теорема. Всякую кусочно-линейную функцию можно выразить через линейные функции с помощью операций $\wedge$ и $\vee$.

Пусть задана произвольная клф F и пусть A -одна из ее вершин. Продолжив за точку A два звена, примыкающие к A, получим две новых клф F' и F'' (см. рис. 5). Суммарное число вершин у F' и F'' на единицу меньше, чем число вершин F .

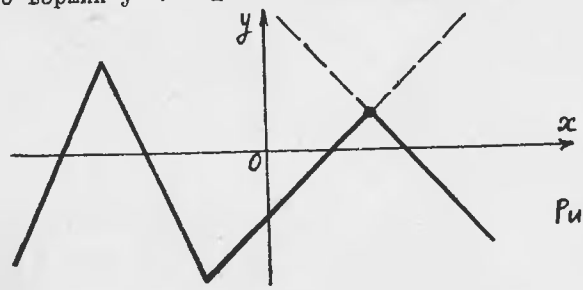


Рис 5.

Доказательство теоремы, очевидно, вытекает из следующей леммы.

Лемма. Всегда можно выбрать вершину A так, чтобы $F = F' \wedge F'$ или $F = F' \vee F''$.

Рассмотрим несколько случаев.

Случай I. У ломаной F найдется вершина A, расположенная выше, чем вся остальная часть ломаной (рис.6). Выбирая эту вершину, очевидно, получим $F = F' \wedge F''$.

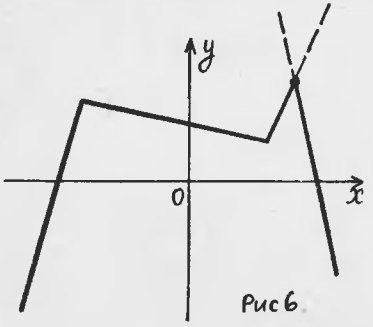


Рис 6

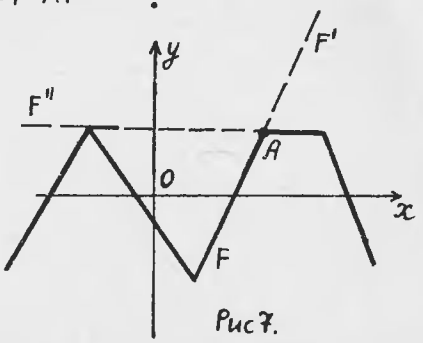


Рис 7.

Случай 2. У F найдется несколько вершин, расположенных на одной высоте, вся остальная часть ломаной лежит не выше этих вершин (рис.7). Если выбрать в качестве A любую из этих вершие, то получим $F = F' \wedge F''$.

Случай 3. У F найдется вершина, расположенная ниже, чем остальная часть ломаной. Выбирая эту вершину, получим $F = F' \vee F'$.

Случай 4. У F имеется несколько вершин на одной и той же высоте, причем остальная часть ломаной лежит не ниже этих вершин. Выбирая любую из этих вершин, получим $F' \vee F''$.

Пусть теперь F -какая-угодно КЛФ. У нее имеется два бесконечных звена: крайнее левое (назовем его f_1) и крайнее правое. Рассмотрим вспомогательную КЛФ $\widetilde{F} = F - f_1$. У нее крайнее левое звено идет по оси x-ов. Если крайнее правое звено на-

правлено вниз или горизонтально, то мы имеем (для $\widetilde{F}$) случаи I или 2, а если вверх, то случаи 3 или 4. В каждом из этих случаев найдется вершина $\widetilde{A}$ ломаной $\widetilde{F}$ такая, что $\widetilde{F}=\widetilde{F}'\wedge\widetilde{F}''$ или $\widetilde{F}=\widetilde{F}'\vee\widetilde{F}''$. Для соответствующей вершины A ломаной F имеем: $F'=\widetilde{F}'+f_1$, $F''=\widetilde{F}''+f_1$. Поэтому $F=F'\wedge F''$ или $F=F'\vee F''$.

Замечание. Пусть клф F имеет n вершин. Чтобы выразить ее через лф, придется применить лемму n раз. В результате получится выражение, содержащее: а) $n+1$ линейную функцию, задающую звенья ломаной F ; б) n знаков $\wedge$ и $\vee$; в) скобки.ж)

§ 8. Дробно-линейные функции.

Определение. Выражение $f=\frac{ax+b}{cx+d}$, где a, b, c, d - числа, причем $c\neq 0$ или $d\neq 0$, называется дробно-линейной функцией (длф) от x .жж) Если $c=0$, то $f=\frac{a}{d}x+\frac{b}{d}$ является линейной функцией и значение $f(\rho)=\frac{a}{d}\rho+\frac{b}{d}$ определено при всех значениях ρ . Если $c\neq 0$, то $f(\rho)=\frac{a\rho+b}{c\rho+d}$ определено для всех значений ρ кроме $\rho=-\frac{d}{c}$.

Пример длф : $f=\frac{k}{x}$; эта формула определяет обратную пропорциональную зависимость, соответствующий график - гипербола (См. рис. 8).

ж) Первоначальное доказательство теоремы было сложнее и давало менее точный результат. Приведенное доказательство принадлежит С.Гусейн-Заде и А.Мильнеру.

жж) Если $c=d=0$, то выражение $f=\frac{ax+b}{cx+d}=\frac{ax+b}{0}$ неопределено ни при одном значении x . Этот случай исключается из рассмотрения.

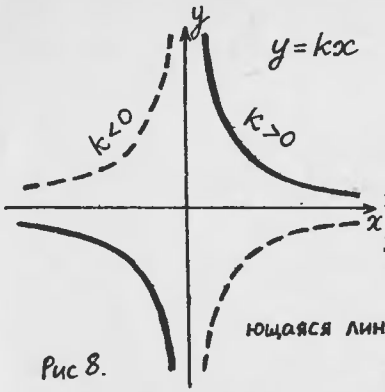


Рис 8.

При сдвиге функции или аргумента, а также при растяжении функции или аргумента из длф. Суперпозиция двух длф также является длф.

Теорема. Всякая длф f, не являющаяся линейной получается из функции $f_0 = \frac{k}{x}$ сдвигом функции и аргумента.

Доказательство. Так как $f = \frac{ax+b}{cx+d}$ не является лф, то $c \neq 0$. Заметим, что

$$\frac{ax+b}{cx+d} - \frac{a}{c} = \frac{bc-ad}{c(cx+d)}.$$

Поэтому $\frac{ax+b}{cx+d} = e + \frac{k}{x-m}$, где $e = \frac{a}{c}, k = \frac{bc-ad}{c^2}, m = -\frac{d}{c}$.

Из доказанной тесремы вытекает, что график любой длф, не являющейся линейной функцией, есть гипербола.

§ 9. Функция $y = x^2$ и ее график.

График функции $y = x^2$ называется параболой. Этот график: а) расположен над осью абцисс и имеет с этой осью только одну общую точку 0; б) симметричен относительно оси ординат; в) имеет с прямой $y = g(x) = 2ax - a^2$ только одну общую точку (a, a^2) и лежит всюду над этой прямой (в самом деле, $f(x) - g(x) = (x-a)^2$).

Прямая $y = 2ax - a^2$ называется касательной к параболе $y = x^2$ в точке (a, a^2).

§ 10. Квадратичные функции.

Выражение $f = ax^2 + bx + c$, где a, b, c -числа, причем $a \neq 0$,[ж] называется квадратичной функцией от x.

ж) При $a = 0$ $f = bx + c$ - линейная функция.

Функция $y=x^2$ является частным случаем квадратичной функции (при $a=1$, $b=c=0$).

Теорема. Всякая квадратичная функция может быть получена из функции $f_0=x^2$ с помощью растяжения функции, сдвига аргумента и сдвига функции.

Доказательство. Чтобы доказать теорему, надо найти числа k, l, m, такие, что при всех значениях x

$$ax^2+bx+c=k(x-m)^2+l \qquad (*)$$

Раскрывая скобки и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, получаем соотношения

$$k=a,\quad -2mk=b,\quad km^2+l=c.$$

Отсюда $k=a$, $m=-\frac{b}{2a}$, $l=c-\frac{ab^2}{4a^2}=c-\frac{b^2}{4a}$. Ясно, что при этих значениях k, l, m равенство (*) справедливо при всех значениях x.

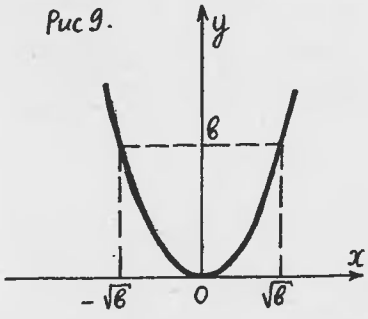
Замечание. Кривая $y=kx^2$ и все кривые, получающиеся из нее параллельным перенесением, называются параболами. Каждая парабола имеет ось симметрии. Точка, в которой эта ось пересекает параболу, называется вершиной параболы. Из доказанной теоремы следует, что график любой квадратичной функции представляет собой параболу. При этом вершина имеет координаты $(-\frac{b}{2a}, c-\frac{b^2}{4a})$.

§ II. Квадратный корень.

Говорят, что число a является квадратным корнем из числа b, если $a^2=b$. Число a называется арифметическим значением квадратного корня из b, если $a^2=b$ и $a\geq 0$. Арифметическое значение квадратного корня из b обозначается $\sqrt{b}$.

Значения квадратного корня можно находить с помощью графика функции $y=x^2$ (см. рис. 9). При $b<0$ квадратный корень из b не определен; при $b=0$ имеется одно значение $\sqrt{b}=0$; при $b>0$ существуют два значения $\sqrt{b}$ и $-\sqrt{b}$.

Рис 9.



Формула $g(x)=\sqrt{x}$ определяет на полупрямой $x\geq 0$ функцию "корень квадратный из x ". Если $f(x)=x^2$ и $g(x)=\sqrt{x}$, то $f[g(x)]=x$ и $g[f(x)]=x$ для всех $x\geq 0$.

Замечание. При $x<0$ $f[g(x)]$ не определено, а $g[f(x)]$ определено, но не равно x .

Функции $f(x)=x^2$ ($x\geq 0$) и $g(x)=\sqrt{x}$ $(x\geq 0)$ взаимно обратны. Их графики получаются один из другого отражением относительно биссектрисы первого и третьего координатных углов.

§ 12. Что такое $\sqrt{2}$?

Предположим, что $\frac{p}{q}$ — несократимая дробь и $\left(\frac{p}{q}\right)^2=2$. Тогда $p^2=2q^2$. Следовательно, p — четно. Полагая $p=2k$, имеем $4k^2=2q^2$. Отсюда $2k^2=q^2$. Значит, q — четно и числа p и q имеют общий множитель 2. Полученное противоречие показывает, что не существует дроби, которая удовлетворяла бы определению $\sqrt{2}$. Однако, нетрудно проверить, что

$1^2<2<2^2;\ (1,4)^2<2<(1,5)^2;\ (1,41)^2<2<(1,42)^2,\ \ldots$

Этот процесс можно продолжать неограниченно и построить бесконечную десятичную дробь $1,4142136$ со следующим свойством. Всякое ее приближение с недостатком дает при возвышении в квадрат число, меньшее 2, а всякое приближение с избытком дает при возвышении в квадрат число, большее 2. Эту бесконечную десятичную дробь мы и считаем значением $\sqrt{2}$.

§ 13. Многочлены.

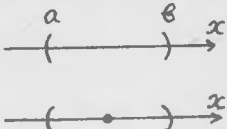
Если рассмотреть последовательные степени x :

$$x^0 = 1,\ x^1 = x,\ x^2, x^3, \dots, x^n,$$

умножить каждую из них на число и сложить, то получится выражение, которое называется многочленом от x . Когда говорят о многочлене степени n , то подразумевают, что коэффициент при наивысшей, n-ой степени x отличен от нуля. Многочлен первой степени – то же, что линейная функция. Многочлен второй степени – то же, что квадратичная функция.

§ 14. Поведение функции в окрестности точки.

Совокупность всех чисел, заключенных строго между a и b , называется интервалом (a,b) (см. рис.). Пусть ε -какое-нибудь положительное число. Интервал $(p-\varepsilon, p+\varepsilon)$ называется окрестностью точки p . Число ε называется радиусом этой окрестности.



Четыре основных типа поведения функции f вблизи точки p : Найдется окрестность $(p-\varepsilon, p+\varepsilon)$ такая, что:

$f(x) > f(p)$	при всех	$x \in (p-\varepsilon, p+\varepsilon)$	минимум
$f(x) < f(p)$	при всех	$x \in (p-\varepsilon, p+\varepsilon)$	максимум
$f(x) < f(p)$	при всех	$x \in (p-\varepsilon, p)$	подъем
$f(x) > f(p)$	при всех	$x \in (p, p+\varepsilon)$	
$f(x) > f(p)$	при всех	$x \in (p-\varepsilon, p)$	спуск
$f(x) < f(p)$	при всех	$x \in (p, p+\varepsilon)$	

Примеры:

1) Линейная функция $f = ax + b$. При $a > 0$ все точки являются точками подъема; при $a < 0$ все точки являются точками спуска. (Если $a = 0$, то поведение функции f отличается от четырех основных типов, перечисленных в таблице).

2) Кусочно-линейная функция. В точке излома возможны все четыре типа поведения:

минимум максимум подъем спуск

Если точка p не является точкой излома и соответствующее звено не горизонтально, то p -точка подъема или спуска.

3) Для функции $f = x^2$ все точки $p > 0$ являются точками подъема, все точки $p < 0$ -точки спуска, точка $p = 0$ является точкой минимума.

§ 15. Поведение многочлена в нуле.

Теорема. Пусть

$$f(x) = a + bx + cx^2 + \cdots + qx^n.$$

Если $b>0$, то f имеет в нуле подъем. Если $b<0$, то f имеет в нуле спуск.

Доказательство теоремы основано на двух леммах.

Лемма I. Если многочлен f имеет степень n и все его коэффициенты по абсолютной величине не превосходят M, то в интервале $(-1,+1)$ (т.е. в окрестности точки 0, имеющей радиус I)

$$|f| \le nM.$$

Доказательство. Если $f = a+bx+\cdots+qx^n$, то при $|x|<1$

$$|f| \le |a| + |bx| + \cdots + |qx^n| \le |a|+|b|\cdot|x|+\cdots+$$
$$+|q|\cdot|x|^n \le |a|+|b|+\cdots+|q| \le n\cdot M.$$

Лемма 2. Если свободный член многочлена равен I, то в некоторой окрестности нуля многочлен больше I/2.

Доказательство. Пусть

$$g(x) = 1+rx+sx^2+\cdots+wx^n.$$

Тогда $g(x) = 1+xh(x)$, где

$$h(x) = r+sx+\cdots+wx^n$$

Пусть $M = |r|\vee|s|\vee\cdots\vee|w|$. По лемме I при $x\in(-1,+1)$

$$|g(x)-1| = |xh(x)| = |x|\cdot|h(x)| \le |x|\,M(n-1).$$

Положим $$\varepsilon = \frac{1}{2M(n-1)} \wedge 1.$$

В окрестности радиуса ε точки 0

$$|g(x)-1| \le \varepsilon M(n-1) < \frac{1}{2}.$$

Значит, $1-g(x)<\frac{1}{2}$ и $g(x)>\frac{1}{2}$.

Доказательство теоремы. Если $b\neq 0$, то

$$f(x)=a+bxg(x),$$

где $g(x)=1+\frac{c}{b}x+\cdots+\frac{a}{b}x^{n-1}$. Пусть $(-\varepsilon,\varepsilon)$ -окрестность нуля, найденная в лемме 2. В этой окрестности $g(x)>\frac{1}{2}>0$ Ясно, что при $b>0$

$f(x)-a=bxg(x)<0$ в интервале $(-\varepsilon,0)$,

$f(x)-a=bxg(x)>0$ в интервале $(0,\varepsilon)$,

и f имеет в точке 0 подъем. Если же $b<0$, то

$f(x)-a=bxg(x)>0$ в интервале $(-\varepsilon,0)$,

$f(x)-a=bxg(x)<0$ в интервале $(0,\varepsilon)$,

и f имеет в точке 0 спуск.

§ 16. Поведение многочлена в точке .

Начнем с примера. Каково поведение многочлена

$$f(x)=8-2x+3x^2-x^3$$

в точке -1.? Ясно, что оно такое же, как поведение многочлена $f(-1+x)$ в точке 0 (произведен сдвиг аргумента на 1). Имеем:

$$f(-1+x)=8-2(x-1)+3(x-1)^2-(x-1)^3=14-11x+\cdots$$

(многоточием заменены члены, которые содержат x в степени 2 и выше).

По теореме § 15, $f(-1+x)$ имеет в точке 0 спуск (ибо коэффициент при x отрицателен). Значит, $f(x)$ имеет в точке -1 также спуск.

Переходим к общему случаю. Какой тип поведения имеет многочлен $f(x)=a+bx+cx^2+\cdots+qx^n$

в точке p ? Чтобы ответить на этот вопрос, надо вычислить коэффициенты при x в многочлене $f(p+x)$.

Лемма. $(p+x)^n = p^n + np^{n-1}x + \cdots$, где многоточие заменяет члены, содержащие x в степени 2 и выше.

Доказательство. При $n = 1,2,3$ утверждение леммы вытекает из известных формул алгебры. Предположим, что для некоторого n

$$(p+x)^n = p^n + np^{n-1}x + \cdots$$

Тогда

$$(p+x)^{n+1} = (p+x)^n(p+x) = (p^n + np^{n+1}x + \cdots)(p+x) =$$
$$= p^{n+1} + np^n x + p^n x + \cdots = p^{n+1} + (n+1)p^n x + \cdots$$

Опираясь на доказанную лемму, имеем

$$f(p+x) = a + b(p+x) + c(p+x)^2 + \cdots + q(p+x)^2 =$$
$$= a + bp + cp^2 + \cdots + qp^2 + (b + 2pc + \cdots + npq^{n-1})x + \cdots$$

Таким образом, коэффициент при x в $f(p+1)$ равен

$$b + 2cp + \cdots + nqp^{n-1}$$

Если этот коэффициент положителен, то f имеет в точке p подъем, если же он отрицателен, то спуск.

§ 17. Производная многочлена.

Определение. Производной многочлена

$$f(x) = a + bx + cx^2 + \cdots + qx^n$$

называется многочлен

$$b + 2cx + \cdots + nqx^{n-1},$$

получающийся из f, если каждый член умножить на его степень и затем уменьшить показатель степени на I. Производная многочлена

$f(x)$ обозначается $f'(x)$.

Из § I6 вытекает следующая теорема:

Теорема. Если $f'(p)>0$, то p точка подъема. Если $f'(p)<0$, то p -точка спуска.

Следствие. Если для многочлена $f(x)$ точка p является точкой минимума или максимума, то $f'(p)=0$.

§ I8. Применение производной к исследованию многочленов I,2 и 3-ей степени.

Для многочлена первой степени $f(x)=ax+b$ производная $f'(x)=a$. Если $a>0$, то все точки суть точки подъема. Если $a<0$, то все точки являются точками спуска.

Для многочлена второй степени

$$f(x)=ax^2+bx+c$$

имеем

$$f'(x)=2ax+b.$$

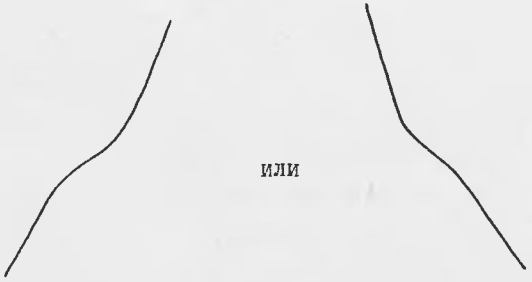
Производная равна нулю в точке $-\frac{b}{2a}$. Только в этой точке может быть максимум или минимум. Пусть $a>0$. Тогда при $x<-\frac{b}{2a}$ $f'(x)<0$ и, следовательно, функция $f(x)$ имеет спуск, а при $x>-\frac{b}{2a}$ $f'(x)>0$ и, значит, f имеет подъем. Ясно, что $x=-\frac{b}{2a}$ - точка минимума. Аналогично убеждаемся, что при $a<0$ многочлен f имеет в точке $-\frac{b}{2a}$ максимум.

Многочлен третьей степени имеет вид

$$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$$

Его производная $f'(x)=3ax^2+2bx+c$.

Если $b^2-3ac<0$, то производная нигде не обращается в нуль. Поэтому f не имеет ни максимумов, ни минимумов. График f может иметь вид

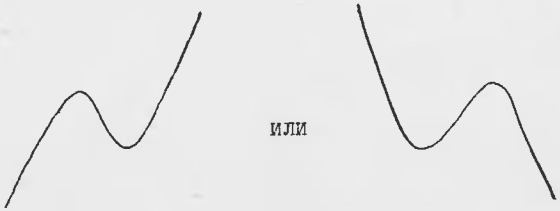


или

Если $b^2-3ac>0$, то производная обращается в нуль в точках

$$x_1=\frac{-b-\sqrt{b^2-3ac}}{2},\quad x_2=\frac{-b+\sqrt{b^2-3ac}}{2}.$$

График может иметь вид



или

При $b^2-3ac<0$ уравнение

$$ax^3+bx^2+cx+d=0$$

имеет один корень. При $b^2-3ac>0$ оно может иметь один, два или три корня.

§ 19. Касательная.

Начнем с примера. Пусть $f(x) = -1+x+x^3$ и пусть $k_1 < 1 < k_2$. По теореме § 15 многочлен

$$f(x) - k_1 x = -1 + (1-k_1)x + x^3$$

имеет в нуле подъем, а многочлен

$$f(x) - k_2 x = -1 + (1-k_2)x + x^3$$

имеет в нуле спуск. Поэтому в некоторой окрестности нуля при $x>0$

$$f(x) - k_1 x > -1, \quad f(x) - k_2 x < -1$$

и, значит, $-1 + k_1 x < f(x) < -1 + k_2 x$; в этой же окрестности при $x>0$

$$f(x) - k_1 x < -1, \quad f(x) - k_2 x > -1$$

и, значит, $-1 + k_2 x > f(x) > -1 + k_2 x$. Пусть ℓ_1 и ℓ_2 – графики линейных функций $y = -1 + k_1 x$ и $y = -1 + k_2 x$. Это – прямые, проходящие через точку A (см. рис.10). В некоторой окрестности точки 0 график лежит между прямыми ℓ_1 и ℓ_2.

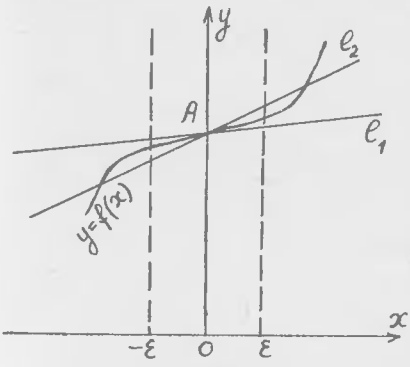


Рис 10.

Рассмотрим еще прямую ℓ

$$y = -1 + x.$$

Если угол с вершиной в A заключает прямую ℓ, то он содержит график в некоторой окрестности нуля.

Дадим теперь общее определение. Пусть A -точка графика $y = f(x)$, соответствующая значению $x = p$. Пусть ℓ -прямая, проходящая через точку A. Говорят, что ℓ -касательная к графику в точке A, если всякий угол с вершиной в A, содержащий прямую ℓ, содержит график в некоторой окрестности точки p.

Теорема I. Касательной к графику $y = f(x)$ в точке A с абциссой 0 является прямая ℓ:

$$y = y_0 + kx,$$

где $y_0 = f(0)$, $k = f'(0)$.

Доказательство. Заметим, что

$$f(x) = y_0 + kx + \cdots$$

где многоточие заменяет члены, содержащие x в степени ≥ 2. Пусть $k_1 < k < k_2$. Тогда

$$f(x) - k_1 x = y_0 + (k - k_1)x + \cdots$$

Поскольку $k - k_1 > 0$, эта функция имеет подъем в нуле. Далее,

$$f(x) - k_2 x = y_0 + (k - k_2)x + \cdots$$

И, поскольку $k - k_2 < 0$, эта функция имеет в нуле спуск. Поэтому в некоторой окрестности нуля при $x < 0$

$$f(x) - k_1 x < y_0, \quad f(x) - k_2 x > y_0$$

и, следовательно, $y_0 + k_1 x > f(x) > y_0 + k_2 x$. В той же окрестности при $x > 0$ $f(x) - k_1 x > y_0$, $f(x) - k_2 x < y_0$ и, значит, $y_0 + k_1 x < f(x) < y_0 + k_2 x$. Мы доказали, что в некоторой окрест-

ности нуля график $y = f(x)$ лежит между прямыми $\ell_1: y = y_0 + k_1 x$ и $\ell_2: y = y_0 - k_2 x$. Остается заметить, что выбирая подходящим образом $k_1 < k < k_2$, можно получить угол с вершиной в A, содержащий прямую ℓ.

Теорема 2. Касательной к графику $y = f(x)$ в точке A с абциссой p является прямая ℓ:

$$y = y_0 + k(x - p),$$

где $y_0 = f(p)$, $k = f'(p)$.

Доказательство. Рассмотрим сдвиг аргумента, при котором точка p переходит в 0. При этом сдвиге график $y = f(x)$ переходит в график $y = g(x) = f(x+p)$ (см. рис 11). По теореме I, касательная ℓ_0 к графику $y = g(x)$ и точка A_0 с абциссой 0 определяется формулой

$$y = y_0 + kx,$$

где $y_0 = g(0)$, $k = g'(0)$. Ясно, что касательная ℓ к графику $y = f(x)$ в точке A получается из ℓ_0 обратным сдвигом аргумента, и, значит, задается формулой

$$y = y_0 + k(x - p).$$

Остается заметить, что $y_0 = g(0) = f(p)$ и, по определению производной (§ I7), $k = g'(0) = f'(p)$.

Замечание. Из доказанной теоремы видно, что производная $k = f'(p)$ – это угловой коэффициент касательной к графику в точке с абциссой p. Если $k > 0$, то касательная идет вверх. Не удивительно (см. § I7), что функция f имеет в точке p подъем. Если $k < 0$, то касательная идет вниз. Как мы знаем из

§ I7 функция f имеет в точке p спуск. Наконец, если $K=0$, то касательная горизонтальна. В § I7 было доказано, что этот случай наблюдается во всех точках максимума и минимума.

Примеры. I) Касательная к графику $y=x^2$ в точке p выражается формулой $y=p^2+2p(x-p)$ или $y=2px-p^2$ (ср. § 9).

2) Касательная к графику $y=x$ в точке p задается формулой $y=p^3+3p^2(x-p)$ или $y=3p^2x-2p^3$. При $p=0$ она совпадает с осью абсцисс и пересекает график в начале координат. Если касательная в точке p пересекает график в точке p, то эта точка называется точкой перегиба.

§ 20. Скорость.

Пусть две частицы I и II движущиеся по прямой, находятся в момент t_0 в одной и той же точке A. Предположим, что найдется окрестность $(t_0-\varepsilon, t_0+\varepsilon)$ момента t_0, такая, что при $t_0-\varepsilon<t<t_0$ частица I находится позади II, а при $t_0<t<t_0+\varepsilon$ частица I находится впереди II. В этом случае будем говорить, что в момент t_0 частица I перегоняет частицу II (или, что II отстает от I).

Пусть I движется по закону $s=f(t)$, а II движется равномерно со скоростью v, т.е. по закону $s=f(t_0)+v(t-t_0)$. Если $v>f'(t_0)$, то II в момент t_0 перегоняет I, а если $v<f'(t_0)$, то II в момент t_0 отстает от I.ж) Поэтому естественно назвать число $f'(t_0)$ скоростью частицы I в момент t_0.

Примеры. I) Если $s=f(t)=s_0+v(t-t_0)$, то $f'(t)=v$.

ж) Чтобы это доказать, надо повторить рассуждения § I9.

Значит, для равномерного движения определение скорости как производной согласуется с ее определением как отношения $\frac{S-S_0}{t-t_0}$ пройденного пути к затраченному на это времени.

2) Пусть $f(t)=a+bt+\frac{1}{2}ct^2$. Тогда $f'(t)=b+ct$. Здесь скорость меняется равномерно. В школьном курсе физики этот тип движения называется равномерно-переменным. Возьмем производную от $f'(t)$. Она называется второй производной и обозначается $f''(t)$. В нашем случае $f''(t)=c$. Число $f''(t)$ называется ускорением движения в момент t. В нашем случае ускорение постоянно.

§ 21. Производная суммы, произведения и степени.*)

Как мы знаем, производная многочлена $f(x)$ в точке p равна коэффициенту при первой степени x в многочлене $f(p+x)$. Точнее,

$$f(p+x)=f(p)+x\,f'(p)+\dots, \qquad (1)$$

где многоточие заменяет члены, содержащие x в степени $\geqslant 2$.

Рассмотрим еще один многочлен

$$g(p+x)=g(p)+xg'(p)+\dots \qquad (2)$$

Складывая равенства (1) и (2), получим

$$f(p+x)+g(p+x)=f(p)+g(p)+x\left[f'(p)+g'(p)\right]+\dots,$$

а перемножая их, приходим к соотношению

---

*) §§ 21 – 25 содержат дополнительный материал, который не входил в программу зачета.

$$f(p+x)g(p+x)=f(p)g(p)+x\left[f'(p)g(p)+f(p)g'(p)\right]+\cdots$$

Отсюда можно заключить, что

$$[f+g]'=f'+g' \tag{3}$$

$$[f\cdot g]'=f'g+g'f \tag{4}$$

Если $g=c$ -постоянная, то $g'=0$, и мы имеем

$$(cf)'=cf'. \tag{5}$$

Полагая $g=f$, получаем

$$[f^2]'=2f\cdot f'.$$

Полагая теперь $g=f^2$, получаем

$$[f^3]'=f'\cdot f^2+f\cdot(f^2)'=f'\cdot f^2+f\cdot 2f\cdot f'=3f^2f'.$$

С помощью математической индукции нетрудно доказать, что при любом натуральном n

$$[f^n]'=nf^{n-1}f'. \tag{6}$$

§ 22. Производная суперпозиции.

Пусть $f(x)$ и

$$g(x)=a+bx+cx^2+\cdots+kx^n$$

два многочлена. Рассмотрим их суперпозицию

$$F(x)=g[f(x)]=a+b\,f(x)+c\,f(x)^2+\cdots+k\,f(x)^n.$$

Пользуясь формулами (3),(5) и (6), имеем

$$F'(x) = b f'(x) + 2c f(x) f'(x) + \dots + k f(x)^{n-1} f'(x) =$$
$$= \left[b + 2cf + \dots + k f^{n-1}\right] f' = g'[f(x)] f'(x).$$

Примеры. I) Если $F(x) = g(x^2)$, то $F'(x) = g'(x^2) \cdot 2x$.
2) Если $F(x) = g(-x)$, то $F'(x) = -g'(x)$.
3) Если $F(x) = g(ax+b)$, то $F'(x) = g'(ax+b) \cdot a$. В частности, если $F(x) = g(x+p)$, то $F'(x) = g'(x+p)$. При $x = 0$ получаем соотношение $F'(0) = g'(p)$, с помощью которого в § I6 была определена производная в любой точке p.

§ 23. Производные высших порядков.

Мы уже встречались со второй производной в § 20. Производная от второй производной называется третьей производной. Вообще, производная от $(n-1)$-ой производной называется n-ой производной. n-ая производная обозначается $f^{(n)}(x)$. Вычислим производные всех порядков от функции $f(x) = x^m$. Имеем

$$f'(x) = m x^{m-1}, \quad f''(x) = m(m-1) x^{m-2},$$
$$f'''(x) = m(m-1)(m-2) x^{m-3}.$$

Вообще, при $n \leqslant m$

$$f^{(n)}(x) = m_n x^{m-n},$$

где через m_n мы обозначили произведение n последовательных целых чисел, из которых наибольшее равно m. При $n = m$ имеем

$$f^{(m)}(x) = m!,$$

где $m!$ обозначает произведение всех натуральных чисел от I до m. При $n > m$ $f^{(n)}(x) = 0$.

§ 24. Формула Тейлора.

Рассмотрим разложение многочлена

$$f(p+x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_mx^m+\cdots+a_nx^n \qquad (*)$$

по степеням x. Мы уже знаем, что $a_0=f(p)$ и $a_1=f'(p)$. Покажем, что остальные коэффициенты можно выразить через производные высших порядков. Продифференцируем равенство (*) m раз. Согласно § 22 (см. пример 3) слева получится $f^{(m)}(p+x)$. Согласно § 21 и § 23 справа получим

$$m!\,a_m+\cdots$$

где многоточие заменяет члены, содержащие x хотя бы в первой степени. При $x=0$ все эти члены обращаются в нуль, и мы получаем $f^{(m)}(p)=m!\,a_m$. Отсюда $a_m=\dfrac{f^{(m)}(p)}{m!}$. Подставляя эти значения в (*), имеем

$$f(p+x)=f(p)+f'(p)x+\frac{f''(p)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(m)}(p)}{m!}x^m+\cdots+\frac{f^{(n)}(p)}{n!}x^n.$$

Это – формула Тейлора.

Формула Тейлора представляет собой тождество, справедливое при всех значениях входящих в него букв (подобно, например, формулам $(p+x)^2=p^2+2px+x^2$ или $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$). Поэтому можно заменить в формуле Тейлора x на $x-p$. Получится тождество

$$f(x)=f(p)+f'(p)(x-p)+\frac{f''(p)}{2!}(x-p)^2+\cdots+\frac{f^{(m)}(p)}{m!}(x-p)^m+\cdots+\frac{f^{(n)}(p)}{n!}(x-p)^n.$$

Рассмотрим линейную функцию

$$y = f(p) + f'(p)(x-p),$$

которая получается, если отбросить в формуле Тейлора все члены, содержащие $x-p$ в степенях 2 и выше. Как мы знаем (§ 19), эта линейная функция задает касательную к графику $y = f(x)$ в точке p. В определенном смысле это – прямая, которая "теснее всего прилегает" к кривой $y = f(x)$. "вблизи точки p". Если рассмотреть первые три члена в формуле Тейлора, то получится квадратичная функция

$$y = f(p) + f'(p)(x-p) + \frac{f''(p)}{2!}(x-p)^2.$$

Ее график – парабола. Она называется соприкасающейся. параболой. Можно доказать, что в определенном смысле из всех парабол соприкасающаяся парабола "теснее всего прилегает" к графику $y = f(x)$ "вблизи точки p". Точно так же можно получить с помощью формулы Тейлора многочлены любой степени $m < n$, лучше всего приближающие многочлен $f(x)$ вблизи точки p.

Все это очень напоминает построение приближений числа с помощью десятичных дробей. Правильная конечная десятичная дробь с десятичными знаками $a_1, a_2, \dots, a_n$ (после запятой) может быть записана в виде

$$\frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \dots + \frac{a_n}{10^n}.$$

Сохраняя, например, два первых слагаемых, мы получаем наилучшее приближение (с недостатком) с точностью до одной сотой. Вообще, сохраняя первые m слагаемых, мы получим наилучшее прибли-

жение (с недостатком) с точностью до $\frac{1}{10^m}$. Мы уже знаем, что кроме чисел, выражающихся десятыми десятичными дробями, бывают числа, которые выражаются бесконечными десятичными дробями. Например,

$$\frac{1}{3} = 0,33333\ldots ,$$

$$\sqrt{2} = 1,4142136\ldots$$

Аналогично, бывают функции, которые записываются не конечной суммой (как многочлены), а бесконечной суммой (ряд Тейлора). Точный смысл этого утверждения вы узнаете позднее, а сейчас я только выпишу без объяснений два таких бесконечных ряда

$$1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots$$

$$x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots$$

Первый из них представляет функцию $\frac{1}{1-x}$ (почему это так, можно понять, если обозначить сумму через f и заметить, что $xf = f - 1$). Второй ряд представляет играющую важнейшую роль в тригонометрии функцию $\sin x$. (В отличие от первого ряда, во втором ряду коэффициенты меняются не периодически).

§ 25. Бином Ньютона.

Напишем формулу Тейлора для функции $f(m) = x^m$. Согласно § 23, $f^{(n)}(x) = m_n x^{m-n}$ при $n \le m$. Поэтому

$$f(p+x) = (p+x)^m = f(p) + f'(p) + \frac{f''(p)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(p)}{n!}x^n + \cdots$$
$$+ \frac{f^{(m)}(p)}{m!}x^m = p^m + mp^{m-1}x + \frac{m_2}{2!}p^{m-2}x^2 + \cdots + \frac{m_n}{n!}p^{m-n}x^n + \cdots + \frac{m_m}{m!}p^0 x^m \qquad (*)$$

Отношение

$$\frac{m_n}{n!} = \frac{m(m-1)\cdots(m-n-1)}{1\cdot 2\cdots n}$$

обозначаетоя обычно $\binom{m}{n}$ или C_m^n . Используя это сокращенное обозначение, можно переписать формулу $(\mathit{И})$ в виде

$$(p+x)^m = p^m + mp^{m-1}x + \binom{m}{2}p^{m-2}x^2 + \cdots + \binom{m}{n}p^{m-n}x^n + \cdots + x^m.$$

Это и есть формула бинома Ньютона. При $m = 2, 3$ она превращается в хорошо известные вам формулы квадрата и куба суммы

$$(p+x)^2 = p^2 + 2px + x^2,$$

$$(p+x)^3 = p^3 + 3p^2x + 3px^2 + x^3.$$

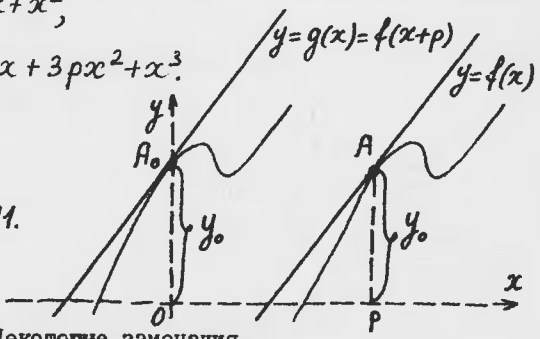


Рис 11.

Некоторые замечания.

Цель первой темы – познакомить учеников с понятием функции на возможно более простом конкретном материале. Мы избегали давать общие определения, а стремились к тому, чтобы у школьников постепенно накапливался достаточный запас конкретных примеров. Основное содержание темы – введение в изучение двух простых, но важных для всей математики и ее приложений классов функций : кусочно-линейные функции и многочлены. Первая тема изучалась в течение сентября-октября. В конце сентября была проведена контрольная работа, а в конце октября зачет. В течение всего времени давались общие для всего потока контрольные за-

дачи, которые подбирались совместно преподавателями, ведущими семинарские занятия и лектором.*) (В неделю читалась одна двухчасовая лекция и проводились три часа семинарских занятий. Часть материала разбиралась, кроме того, на уроках математики, которые вела Н.Ю.Вайсман).

Ниже приводятся тексты контрольных задач, необязательных задач, которые давались на конкурсе, а также текст контрольной работы и письменной части зачета.

КОНТРОЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ

I. Пусть $f(x)=3x+5$. Построить на одном чертеже графики функций

а) $f(x)$, $f(x+1)$, $f(x)+1$, $f(x-1)$;

б) $f(x)$, $-f(x)$, $f(-x)$;

в) $f(x)$, $2f(x)$, $f(2x)$, $f(\frac{x}{2})$.

2. График функции $f(x)$ имеет вид

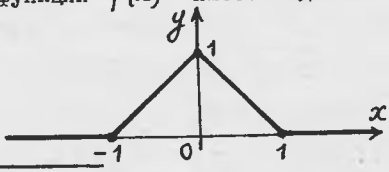


Рис 12.

*) Лекционный поток включает три класса. Для семинарских занятий каждый класс делится на две группы. Группой руководят три студента. Приводим их фамилии: А.Аверкин, В.Вейбер, С.Гусейн-Заде, О.Дынкина, И.Евстигнеев, О.Зайцева, Ф.Зак, Г.Кабатянский, Ю.Кифер, С.Кузнецов, А.Мильнер, В.Мятлев, С.Натанзон, А.Орлов, С.Пирогов, С.Смагин, А. Толпыго, А.Шапиро.

Построить графики функций $f(x+1), f(x)-1, f(x)+1, f(-x), f(2x), f(\frac{x}{2})$.

3. Лифт поднимается со скоростью I м/сек. По тросу, поднимающему лифт, ползет муха со скоростью 5 см/сек. В момент, когда лифт трогается, она находится на расстоянии 5 м от основания здания. На каком расстоянии от основания она находится через t сек?

4. Через $a \vee b$ обозначается наибольшее, а через $a \wedge b$ наименьшее из чисел a и b. Какие из следующих соотношений всегда верны:

$$(a \wedge b) \vee b = (a \vee c) \wedge (b \vee c),$$
$$(a \vee b) \wedge c = a \vee (b \wedge c),$$
$$(a \vee b) \wedge (c \wedge d) = (a \wedge c) \wedge (b \wedge d),$$
$$(a \vee b) \wedge (c \wedge d) = (a \wedge b) \vee (c \wedge d),$$
$$(a \vee b) + (a \wedge b) = a + b \quad ?$$

5. Выразить $x \vee (-x)$, $x \wedge (-x)$, $x \wedge 0$, $x \vee 0$ через x и $|x|$.

6. Нарисовать графики функций: а) $(1-x) \wedge (1+x)$, б) $1 \wedge x$, в) $0 \wedge x$, г) $0 \vee x$, д) $(0 \vee x) \wedge 1$.

7. Пусть $f(x) = -x+2$, $g(x) = 5x$. Найти $f[g(x)]$ и $g[f(x)]$.

8. Через $\rho(x, A)$ обозначается расстояние от точки x до множества A. Нарисовать график функции $f(x) = \rho(x, A)$ для следующих множеств A:

а) целые числа,

б) положительные целые числа,

в) два числа – I и I,

г) отрезок с концами –I, I,

д) все числа с абсолютяой величиной, не меньшей I.

9. Решить уравнения : а) $|x-2|=4$,

б) $|x-1|+|x+1|=2$.

10. Найти все линейные функции $f(x)$, для которых $f[f(x)]=x$ (при всех x).

11. Найти линейную функцию $e(x)$, такую, что для всех линейных функций f : а) $f \circ e = f$; б) $e \circ f = f$. (Через $f \circ g$ обозначается суперпозиция $f[g(x)]$).

12. В таблице

x	-1	0	1	3	7
y	-5	-4	-1	-2	11

приведены значения линейной функции в пяти точках; три значения правильно, а два-с ошибкой. Найти и исправить ошибки.

13. Найти линейную функцию f , для которой : а) $f(-1)=5$, $f(8)=0$, б) $f(p_1)=q_1$, $f(p_2)=q_2$.

14. Какому соотношению должны удовлетворять числа p_1, p_2, p_3, q_1, q_2, q_3 , чтобы для какой-нибудь линейной функции $f(p_1)=q_1, f(p_2)=q_2, f(p_3)=q_3$?

15. Описать все целые значения x , при которых линейная функция $f(x)=\frac{7}{15}x+\frac{1}{3}$ принимает целые значения. Может ли линейная функция принимать целые значения только при двух целых значениях x ?

16. Между Лиссом и Зурбаганом имеется регулярное автобусное сообщение. Поездка в один конец продолжается 12 часов. Автобусы отправляются через каждый час и, прибывая на место назначения, немедленно выезжают обратно. Сколько автобусов встретит путешественник на пути между городами?

17. Записать с помощью знаков $\wedge$ и $\vee$ среднее по величине

из трех чисел a, b, c.

18. Доказать, что $(-a)\wedge(-b)=-(a\vee b)$.

19. С помощью операций сложения и суперпозиции выразить через линейные функции и $|x|$: а) функцию $f(x)=\begin{cases} kx & \text{при } x\geq 0 \\ lx & \text{при } x\leq 0 \end{cases}$;

б) функцию, имеющую график

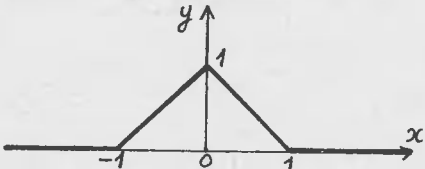


Рис 13.

20. Графики кусочно-линейных функций $f(x)$ и $g(x)$ -ломаные из 100 и 50 звеньев. Какое наибольшее и наименьшее число звеньев может быть у графика функции $f(x)+g(x)$?

21. Сколько может быть звеньев у $f\wedge g$, если f линейная функция, а g -кусочно-линейная функция из 100 звеньев?

22. Выразить функцию через линейные функции с помощью операций $\wedge$ и $\vee$.

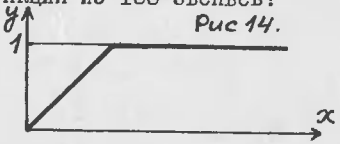


Рис 14.

23. Пусть $f=\frac{ax+b}{cx+d}$. Показать, что $f(x)+h, f(x-m), kf(x), f(\frac{x}{e})$ также дробно-линейные функции (длф).

24. Вычислить суперпозицию $f=\frac{ax+b}{cx+d}$ и $g=\frac{ax+b}{c'x+d'}$. Показать, что это снова длф.

25. Построить графики $\frac{x+1}{x-1}$, $\frac{2x-1}{x-2}$, $\frac{x+2}{2x+1}$.

26. Пусть $f=\frac{x+1}{x-1}$. Найти длф g так, чтобы $f[g(x)]=x$.

27. Описать общий вид линейных функций $f(x)$, для которых существует линейная функция $g(x)$, удовлетворяющая соотношению $g[g(x)]=f(x)$. (Евстигнеев).

28. Найти какие-нибудь кусочно-линейные функции $g(x)$, удовлет-

воряющие соотношению $g[g(x)] = f(x)$; где:

а) $f(x) = \frac{x+|x|}{2}$, б) $f(x) = \frac{x-1+|x-1|}{2}$.

29. Известно, что при любых значениях x, y и t

$$f[tx+(1-t)y] = tf(x)+(1-t)f(y).$$

Доказать, что f -линейная функция. (Гусейн-Заде).

30. Найти обратные для следующих функций

$$f_1(x) = 2x,\ f_2(x) = 2x-1,\ f_3(x) = \frac{x}{x-2}.$$

31. В какой точке оси абсцисс принимает наименьшее значение сумма квадратов расстояний от I до 2?

32. Какую наибольшую площадь может иметь прямоугольник с периметром $2p^2$?

33. Какие наибольшее и наименьшее значения может принимать x , если известно, что $|x-1| \le \frac{1}{2}$?

34. Функция f называется четной, если для всех x $f(-x)=f(x)$ и нечетной, если для всех x $f(-x) = -f(x)$. Найти все четные и нечетные ЛФ. (Толпыго).

35. Доказать, что всякая КЛФ равна сумме четной КЛФ и нечетной КЛФ. (Толпыго).

36. Найти все многочлены, являющимися четными, и все многочлены, являющиеся нечетными функциями. Как представить многочлен в виде суммы четной и нечетной функции? (Толпыго).

37. Найти все четные и все нечетные среди дробно-линейных функций. (Толпыго).

38. Указать какую-нибудь окрестность нуля, в которой положительны функции $1+2x,\ 1+3x-x^2,\ 1+x+x^2+x^3+x^4$

39. Указать какую-нибудь окрестность точки I, в которой следую-

щие функции меньше 2: $1+\frac{1}{2}x,\ 2-x+x^2,\ 1-x+x^2-x^3+x^4$.

40. Функция $h(x)$ имеет в точке p подъем. Каков тип поведения в окрестности p имеет функция $a+bh(x)$, если $b>0$ и если $b<0$?

41. Известны типы поведения в точке p функций f и g. Какой тип поведения может иметь сумма $f+g$? Дать ответ в виде таблицы:

	минимум	максимум	подъем	спуск
минимум				
максимум				
подъем				
спуск				

Оставить незаполненными клетки, где ответ неоднозначен.

42. Доказать, что для каждого многочлена $f(x)=x^n+kx^{n-1}+\dots+rx+1$ можно найти такое число A, что $f(x)>\frac{1}{2}x^n$ при всех $x>A$.

43. Пусть $f(x)=x^n+kx^{n-1}+\dots+rx+s$. Если n четно, то найдется такое B, что $f(x)>\frac{1}{2}x^n$ при всех $x<B$. Если n нечетно, то найдется такое B, что $f(x)>\frac{1}{2}x^n$ при всех $x<B$.

44. Выяснить тип поведения в нуле следующих многочленов:

$$5-3x+x^2,\ x+x^2-x^3,\ 1+x+x^2+x^3+x^4+x^5$$

Указать окрестности, в которых выполняются соответствующие определения.

45. Вычислить производные многочленов $1+2x+x^2,\ 1-x+x^2-x^3+x^4$. Каков тип поведения этих многочленов в точке 2?

46. Что получится, если в выражении $(1+2h+5h^2)^{10}$

раскрыть скобки и отбросить все члены, содержащие h в степенях, больших единицы?

47. Начертить эскизы графиков следующих многочленов:

x^3, x^3+x, x^3-x, x^3+x^2, x^3-x^2.

48. Сколько корней имеют уравнения:

$x^3+x+1=0$, $x^3-x+1=0$, $x^3-x-1=0$?

49. Докажите, что в некоторой окрестности нуля график многочлена x^3+x-1 лежит между прямыми $y=1{,}01x-1$ и $y=0{,}99x-1$, а также между прямыми $y=1{,}001x-1$ и $y=0{,}999x-1$.

50. Нарисуйте эскизы графиков следующих многочленов: x^4, x^4-x.

51. Сколько точек максимума и минимума имеет многочлен x^4-2x^2-4x+1 ?

52. Написать уравнения касательных к графикам:

а) $f(x)=x^2+x$ в точках 0 и I,

б) $f(x)=1+x^3+x^5$ в точках 0 и -I.

53. Найти отношение длин отрезков, отсекаемых на осях координат касательной к графику $y=ax^2+bx+c$ в точке p.

54. Две частицы выходят одновременно из точки 0 и движутся равноускоренно в положительном направлении. В начальный момент времени скорость первой равна ее ускорению. Скорость второй вдвое меньше, а ускорение–вдвое больше, чем у первой. Когда вторая частица догонит первую?

55. Найти производную в точке I у многочлена $(x-1)^2g(x)$.

56. Говорят, что a является корнем многочлена $f(x)$, имеющим кратность k, если $f(x)$ представляется в виде $f(x)=(x-a)^kg(x)$, причем $g(a)\neq 0$.

Доказать, что корень кратности $k \geqslant 1$ для $f(x)$ является корнем кратности $k-1$ для $f'(x)$.

57. Доказать, что если $f(x)$ – нечетная функция, то $f'(x)$ – четная функция.

58. Чему равна степень $f[g(x)]$, если f – многочлен n-степени и g – многочлен m-степени.

59. Представить многочлен x^4+x^2+x в виде суперпозиции двух квадратных многочленов.

60. Чему равна 5-я производная многочлена $(2x+3)^{10}$?

61. Разложить многочлен $x^4+x^3+x^2+x+1$ по степеням $x-1$.

62. Нарисовать для многочлена x^3+x^2+x+1 соприкасающуюся параболу в точке $x=1$.

63. Найти коэффициент при x^5 в разложении $(1+x)^{10}$, $(x-1)^8$, $(x+2)^7$, $(2x+1)^6$.

Задачи на конкурс

1. Графики кусочно-линейных функций f и g – ломаные из 100 и 50 звеньев. Какое наибольшее и наименьшее число звеньев может быть у функции $f[g(x)]$?

2. Тот же вопрос для функций $f \wedge g$ и $f \vee g$.

3. Доказать, что дробно-линейная функция g, удовлетворяющая соотношению $g[g(x)] = \frac{ax+b}{cx+d}$, найдется тогда и только тог-

да, когда $ad \geq bc$.

4. Найти все дробно-линейные функции g, такие, что $g[g(x)]=x$.

5. Даны две КЛФ $f(x)$ и $g(x)$. Первая из них четна, вторая – нечетна и обе имеют одинаковое число звеньев. Доказать, что их сумма не имеет излома в нуле. (Толпыго).

6. Показать, что кубическое уравнение $x^3-3p+q=0$ имеет три корня, если $4p^3-q^2>0$. Выяснить, когда это уравнение имеет один корень и два корня.

Контрольная работа

Вариант I

I. Деревня С расположена на шоссе между деревнями А и В в 5 км от А и в 8 км от В. В деревне А живет 100 школьников, в В – 40 школьников и в С – 50. Нарисуйте график функции $f(x)$, обозначающей суммарное расстояние, которое приходится проходить всем школьникам, если построить школу в пункте . При каком положении школы это суммарное расстояние будет минимально?

2. Какие из соотношений правильны при всех значениях входящих в них букв

1) $a \vee 0-(-a) \vee 0 = a$,
2) $a \vee 0-(-a) \vee 0 = |a|$,
3) $(10 \vee y) \wedge (z \vee u) \geq (10 \wedge z) \vee (y \wedge u)$,
4) $a \vee b + c \vee d \geq (a \vee b) \vee (c \vee d)$,
5) $(a+b) \vee (a-b) \geq (a \vee b) \vee (c \vee d)$,
6) $(a+b) \vee (a-b) = |a|+|b|$.

(для неправильных соотношений указать какие-нибудь числовые значения, при которых они неправильны. Доказывать правильность верных формул не требуется).

3. Представить функцию

$$|x-2|-|x|$$

через линейные функции с помощью операций $\wedge$ и $\vee$ (пользоваться операциями сложения и вычитания нельзя).

Вариант 2

I. Задача I первого варианта, но в деревне В – 60 школьников.

2. Задача 2 первого варианта для соотношений

1) $a \vee 0 + (-a) \vee 0 = |a|$,
2) $a \vee 0 + (-a) \vee 0 = a$,
3) $(5 \vee y) \wedge (z \vee u) \leq (5 \wedge z) \vee (y \wedge u)$,
4) $(a-b) \vee (b-a) \geq (|a|-|b|) \vee (|b|-|a|)$,
5) $a \wedge d = (b \vee a) \wedge (a \wedge d)$,
6) $|a+b| \vee |a-b| = (a+b) \vee (a-b) \vee (-a-b)$.

3. Задача 3 первого варианта для функции

$$|x+2|+|x|.$$

Задачи для зачета

I. Нарисовать графики многочленов $y = 4x^3 - 3x + q$ при $q = 2,0$ и – I. Указать при каких значениях q уравнение $4x^3 - 3x + q = 0$ имеет один, два и три корня.

1а. $y = x^3 - 3p^2x + 2$ при $p = 2, 0, -2$.

2. Какая точка графика $y = x^2$ находится ближе всего к прямой $y = x - 1$?

2а. К точке $(0, 1)$?

3. Укажите какую-нибудь окрестность нуля, в которой положителен многочлен $f(x) = 2x^5 - 4x^4 + 8x^3 - 4x^2 - 2x + 4$. Дайте строгое обоснование.

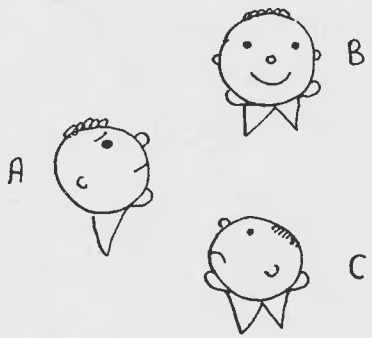
3а. $f(x) = x^5 - 5x^4 - 9x^3 + 2x^2 - 3x + 5$.

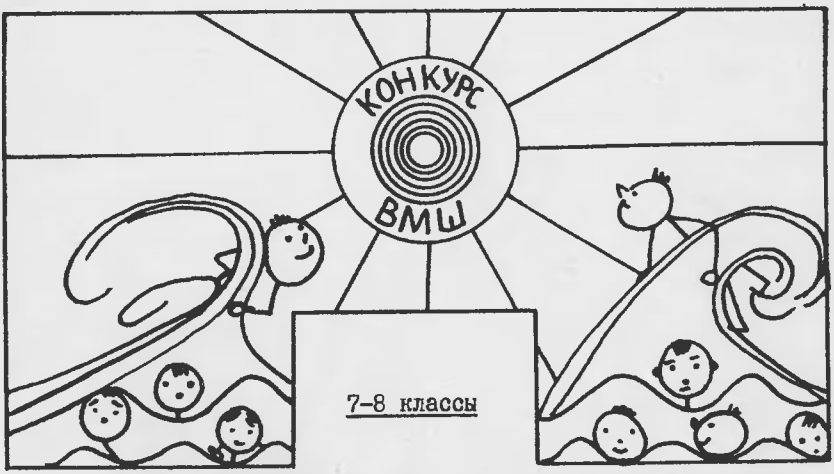
4. Найти все многочлены $f(x)$ такие, что

$f'(x) = f''(x) + x$ и $f(0) = 0$.

4а. $f'(0) = f''(x) - x$ и $f(1) = 1$.

5. Школьники А, В и С сдавали зачет. С получил отметку, наименьшую из полученных А и В, а В-более высокую оценку, чем А и С. Какие оценки получили А и В, если известно, что С получил четверку?





Задача № I0. Некоторые целые числа окрашены в красный цвет, остальные-в синий. Известно, что если числа a и b окрашены в красный, то числа $(a+b)$ и $(a-b)$ окрашены в красный цвет. Описать все такие способы раскраски, при которых I967 - красное число.

Задача № II. На сторонах АВ, ВС, АС треугольника АВС выбраны точки К, Л, М, причем ВЛ = I/3 ВС; СМ = I/3 АС; ВК = I/5 АВ. Доказать, что прямые АЛ, СК, ВМ пересекаются в одной точке.

Задача № I2. Доказать, что если три простых числа, большие трех, составляют арифметическую прогрессию, то ее разность делится на 6.

Задача № I3. В четырехугольнике АВСД $CD \perp AB$, $BC \perp AD$. Доказать, что окружности, описанные вокруг треугольников АВС, ВСД, СДА, ДАВ, имеют равные радиусы.

Задача № I4. Найти три различных натуральных числа, таких, что при делении произведения любых двух на третье в остатке по-

лучится I.

Задача № I5. На плоскости нарисована схема, состоящая из кружков и соединяющих их отрезков (см. рис.15). Вписать в кружки числа так, чтобы в кружках, не соединенных отрезками непосредственно, стояли взаимно-простые числа, а в "соседних" кружках числа имели общий делитель.

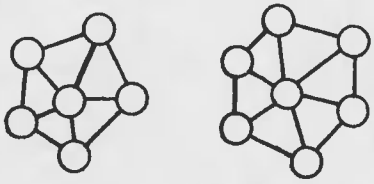


Рис 15.

Задача № I6. Даны I968 чисел $x_1=0, x_2, x_3, \dots, x_{1967}, x_{1968}=0$. Известно, что $x_n=\frac{x_{n-1}+x_{n+1}}{4}+1$ при $n=1,2,\dots,1967$. Доказать, что все эти числа меньше 2.

Задача № I7. Даны числа $a_1=1, a_2=1, a_3, \dots, a_n, \dots$, причем: $a_k=2a_{k-1}+4a_{k-2}$ при $k>2$. Выразить сумму $a_1+a_2+\dots a_n$ через a_{n+2} и a_{n-1}.

Задача № I8. К двум непересекающимся окружностям проведены внешние и внутренние общие касательные. Доказать, что следующие 6 точек: центры окружностей и 4 точки пересечения внешних и внутренних касательных лежат на одной окружности.

Задача № I9. Пусть даны I968 чисел $x_0=0, x_1, \dots, x_{1966}, x_{1967}=0$. Нарисуем ломаную линию, как это показано на рисунке

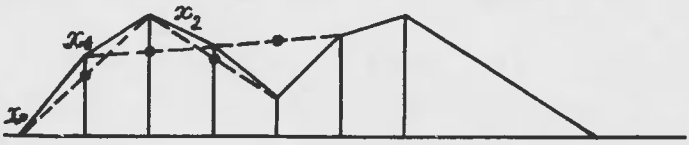


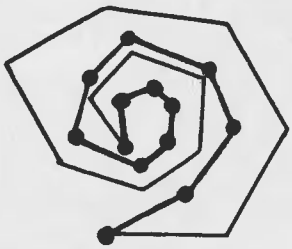
Рис 16.

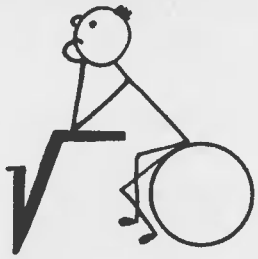
Нарисуем новую ломаную, вершины которой имеют высоту:

$$y_n = \frac{x_{n+1} + x_{n-1}}{2}.$$

а) доказать, что если исходная ломаная не выпуклая, то и новая линия невыпуклая.

б) доказать, если исходная линия выпуклая, то и новая линия выпуклая.





XXX МОСКОВСКАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА

М. ДУНСКАЯ *)

Сначала назовем победителей XXX Московской математической олимпиады.

I премия

УП класс. Аркадьев Владимир, шк. № 36.

IX класс. Курчанов Павел, инт. № I8.

X класс. Олюнин Виктор, инт. № I8.

П премия

УП класс. Щепочкина Ирина, шк. № 2.

УШ класс. I. Бауман Евгений, шк. № 2
2. Пухов Александр, шк. № 2
3. Трегулов Энвер, шк. № I79
4. Черноуцан Алексей, шк. № 2
5. Шокуров Александр, шк. № 2

*) Условия и решения задач П тура см. в статье автора в XШ выпуске "Математической школы".

IX класс. Богатырев Андрей, шк. № 7.

III премия.

VII класс. 1. Абольник Ян, шк. № 2
2. Гусаров Александр, шк. № 2
3. Новикова Наталья, шк. № 2
4. Розин Яков, шк. № 2
5. Фридлендер Леонид, шк. № 2.

VIII класс. 1. Говоровский Сергей, шк. № 2.
2. Кулаков Александр, шк. № 2
3. Полетаев Николай, шк. № 2
4. Райский Дмитрий, шк. № 597
5. Темкин Михаил, шк. № 2
6. Шувалов Валерий, шк. № 114.

IX класс. 1. Гисин Владимир, шк. № 7
2. Кеплун Владимир, шк. № 2
3. Локшин Александр, шк. № 2

X класс. 1. Бошерницан Михаил, инт. № 18
2. Брук Марк, шк. № 2
3. Волконский Владимир, шк. № 2
4. Милявский Михаил, инт. № 18
5. Пекарь Евгений, инт. 18

Кроме того, 52 человека получили похвальный отзыв I степени и 116 человек - похвальный отзыв II степени.

Ниже приводятся условия и решения задач III тура.

III тур

УП класс

Задача № I. В треугольнике АВС проведены высоты АЕ, ВМ, CP. Известно, что $EM \parallel AB$ и $EP \parallel AC$. Доказать, что $MP \parallel BC$.

Решение. Рассмотрим $\triangle EMP$. Так как $PE \parallel AC$, $BM \perp AC$, то $BM \perp PE$. Аналогично, $PC \perp EM$. Так как высоты в треугольнике пересекаются в одной точке, то высота в $\triangle PME$, проведенная из вершины E, проходит через точку О (BM и PC – высоты в этом треугольнике). Но AE как раз проходит и через точку О, и через точку E, поэтому $AE \perp PM$. Из того, что $AE \perp PM$ и $AE \perp BC$, следует, что $PM \parallel BC$.

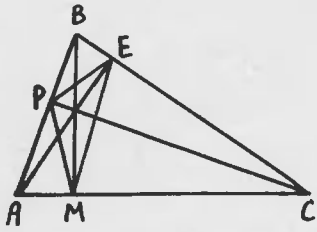


Рис 17

Задача № 2. Над квадратным катком надо повесить 4 лампы так, чтобы они его полностью освещали. На какой наименьшей высоте надо повесить лампы, если каждая лампа освещает круг радиуса, равного высоте, на которой она висит?

Решение. Пусть сторона квадрата равна a. Рассмотрим пять точек квадрата: A, B, C, D, O (см. рис. 18). Так как ламп всего четыре, а каждая точка катка должна быть освещена, то какая-нибудь лампа освещает сразу две из этих точек: либо две вершины, расстояние между которыми равно a, либо вершину и

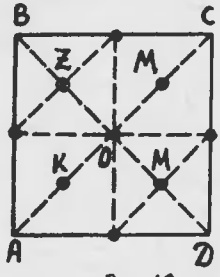


Рис 18.

точку O, расстояние между которыми равно $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. В первом случае высота подвеса не может быть меньше, чем $\frac{a}{2}$, а во втором – $\frac{a\sqrt{2}}{4}$. Так как $\frac{a\sqrt{2}}{4} < \frac{a}{2}$, то высота подвеса не меньше, чем $\frac{a\sqrt{2}}{4}$. Это и будет искомая высота, так как если подвесить лампы в точках K, Z, M, N (см. рис.18), то весь каток будет освещен.

Задача № 3. Доказать, что существует такое целое число q, что в десятичной записи числа $q \cdot 2^{1000}$ нет ни одного нуля.

Решение. Если в десятичной записи числа 2^{1000} нет нулей, то можно положить $q = 1$.

Пусть теперь среди цифр этого числа есть нули, и пусть, если идти от конца, первый нуль встретится на k-ом месте от конца записи. Построим число, делящееся на 2^{1000}, в десятичной записи которого на последних k местах стоят цифры, отличные от нуля. Таким число будет $2^{1000} + 10^{k-1} \cdot 2^{1000}$. Действительно, второе слагаемое оканчивается на $(k-1)$ нуль, поэтому последние $(k-1)$ знаков суммы будут теми же, что и у числа 2^{1000}, то есть не нули, а на k-ом месте от конца в записи суммы будет стоять последняя цифра числа 2^{1000}, то есть 6 (докажите, что 2^{1000} оканчивается на 6); итак, последние K цифр числа $p = 2^{1000} + 10^{k-1} \cdot 2^{1000}$ – не нули. Пусть в числе p последние $(n-1)$ цифры не нули, а n-ая от конца – нуль. Тогда можно таким же способом получить новое число, $l = p + 10^{n-1} \cdot 2^{1000}$, у которого n последних цифр не нули.

Продолжим этот процесс до тех пор, пока мы не получим чис-

ла m , у которого последние 1000 цифр не являются нулями. Это число можно записать в виде $r \cdot 2^{1000}$ (по построению). Представим теперь полученное число $r \cdot 2^{1000}$ в виде суммы двух слагаемых, таких, что у одного из них десятичная запись состоит из последних 1000 цифр числа $r \cdot 2^{1000}$, взятых в том же порядке, а второе слагаемое оканчивается на 1000 нулей, а перед ними стоят все цифры нашего числа без последних 1000 цифр. Очевидно, что второе слагаемое делится на 10^{1000} , а значит, и на 2^{1000} , поэтому и первое слагаемое делится на (так как их сумма делится на 2^{1000}), но в десятичной записи первого слагаемого нет нулей, откуда следует, что оно – искомое.

Задача № 4. Число y получается из натурального числа x некоторой перестановкой цифр. Доказать, что каково бы ни было число x , $x+y \neq \underbrace{99\ldots99}_{1967\text{ раз}}$.

Решение. Предположим, что $x+y=\underbrace{99\ldots99}_{1967\text{ раз}}$.

Пусть $x=\overline{x_1 x_2 \cdots x_{1967}}$ *), $y=\overline{y_1 y_2 \cdots y_{1967}}$. Так как $0 \le x_i \le 9$, $0 \le y_i \le 9$, $i = 1, 2, \ldots, 1967$, то $0 \le x_i + y_i \le 18$, но по предположению, $x+y=\overline{99\ldots99}$, поэтому $x_i + y_i = 9$, $i = 1, 2, \ldots, 1967$. Из того, что и y состоят из одних и тех же цифр, следует, что сумма цифр

*) $x=\overline{x_1 x_2 \ldots x_{1967}} = x_1 \cdot 10^{1966} + x_2 \cdot 10^{1965} + \ldots + x_{1967}$, $0 \le x_i \le 9$, $i = 1, 2, \ldots 1967$ – десятичная запись числа x .

у них одинаковая. Обозначим ее через

$$S: \quad x_1 + x_2 + \cdots + x_{1967} = y_1 + y_2 + \cdots + y_{1967} = S.$$

Тогда $$2S = (x_1 + y_1) + (x_2 + y_2) + \cdots + (x_{1967} + y_{1967}) =$$

$$= 9 + 9 + \cdots + 9 = 9 \cdot 1967 \text{ (I)}$$

В левой части равенства (I) стоит четное число, а в правой части - нечетное. Полученное противоречие доказывает утверждение задачи.

Задача № 5. В четырех заданных точках на плоскости расположены прожекторы, каждый из которых может освещать прямой угол. Стороны этих углов могут быть направлены на север, юг, запад или восток. Доказать, что прожекторы можно направить так, что они осветят всю плоскость.

Решение. Проведем на плоскости прямую с запада на восток. Очевидно, ее можно сдвинуть параллельно самой себе так, чтобы северней этой прямой находилось не больше одного прожектора, южнее - не больше двух, а остальные прожекторы - на самой прямой (может быть, даже все четыре).

Если северней прямой есть прожектор, то возьмем его и еще один на прямой, если же северней прямой нет прожектора, то на прямой есть, по крайней мере, два прожектора, оерем их. Тот из выбранных прожекторов, которых находится западнее, направим так, чтобы стороны освещаемого им угла шли на юг и восток, а более восточный - так, чтобы стороны угла шли на юг и запад. Тогда будет освещена вся полуплоскость, лежащая южнее прямой.

Аналогично можно оставшимися прожекторами осветить северную полуплоскость.

УШ класс

Задача № I. См. задачу № 3 для 7 класса.

Задача № 2. Обозначим через $d(N)$ число делителей натурального числа N. Найти все такие N, что $\frac{N}{d(N)}=p$, где p -простое число. (Числа I и N также считаются делителями числа N).

Решение. Пусть $N=p\cdot d(N)$, где p - простое число. Обозначим $d(N)$ через q. Если r -делитель числа q, то r и pr - делители числа N. Отсюда следует, что

$$q \le 2d(q) \quad (I).$$

С другой стороны, если m -делитель числа M, причем $m \le \sqrt{M}$, то этому делителю соответствует другой делитель числа $M - \frac{M}{m} \ge \sqrt{M}$, откуда следует, что $d(M) \le 2\sqrt{M}$, поэтому

$$d(q) \le 2\sqrt{q} \quad (2).$$

Учитывая (I) и (2), получаем, что

$$q \le 4\sqrt{q} \quad \text{или} \quad q \le 16 \quad (3).$$

Заметим, что $q \neq 5$, ибо $d(5)=2$, а $5>2\cdot 2=4$, то есть не выполняется (I). Аналогично устанавливается, что q не может равняться 7,9, I0,II,I3,I4,I5,I6.

Итак, возможные значения q находятся среди чисел I,2, 3,4,6,8,I2, а для N - среди чисел $p, 2p, 3p, 4p, 6p, 8p, 12p$. Проверим эти возможности.

$d(N) \ge 2$ при всех $N>1$, поэтому $q \neq 1$.

При $N=2p$ (то есть $q=2$) имеем: $d(N)=4$ (делители числа $2p$ - это I; 2; p ; $2p$), то есть $N=4p$ (так

как $N = p \cdot q$) – противоречие.

При $N = 3p$ $(p \neq 3)$, $d(N) = 4$ – противоречие, если же $N = 3p$, $p = 3$, то $d(N) = 3$ и $N = 9$.

Аналогично исследуются остальные случаи.

Ответ: N может равняться 8,9,12,18,$8p$ $(p \neq 2)$, $12p$ $(p \neq 2,3)$, где p –простое число.

Задача № 3. На каждой стороне прямоугольного треугольника во внешнюю его сторону построено по квадрату (пифагоровы штаны). Каким должен быть прямоугольный треугольник, чтобы получившуюся фигуру можно было вписать в круг?

Решение. Точка пересечения перпендикуляров, проведенных через середины отрезков DE, KF и ML, дает центр искомой окружности. Эта точка совпадает с точкой пересечения перпендикуляров, проведенных через середины отрезков AB , BC и AC , то есть с центром окружности, описанной около треугольника ABC, который лежит на середине гипотенузы AB, в точке O. Пусть $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$. Тогда $OD = \sqrt{\left(\frac{c}{2}\right)^2 + c^2} = \frac{c}{2}\sqrt{5}$;

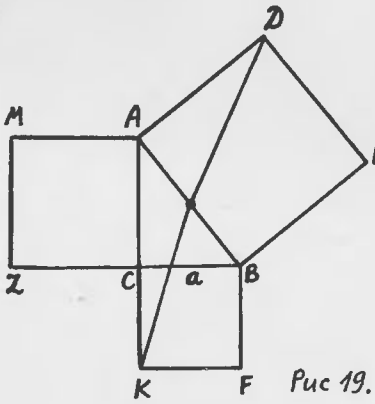


Рис 19.

$OK = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(a + \frac{b}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{4} + a^2 + ab} = \sqrt{\frac{c^2}{4} + a^2 + ab}$.

Но $OD = OK$, поэтому $a^2 + ab = c^2 = a^2 + b^2$, откуда $ab = b^2$ или $a = b$, то есть треугольник равнобедренный. Для такого треугольника, как нетрудно проверить,

$$OK = OD = OE = OF = OL = OM = \frac{a\sqrt{10}}{2}.$$

Задача № 4. На шахматной доске размером 1000×1000 клеток находятся черный король и 499 белых ладей. Черные и белые ходят по очереди. Доказать, что как бы ни ходили ладьи, король всегда сможет за несколько ходов встать под бой одной из них.

Решение. Пусть король через несколько ходов встал на поле $b2$ (если оно занято, то король может встать на любое из четырех соседних полей и окажется под боем). Если на первых трех горизонталях или вертикалях есть хотя бы одна ладья, то король следующим ходом встанет под бой.

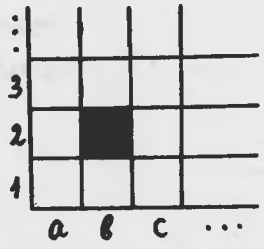


Рис 20.

Пусть все ладьи находятся в правой верхней части доски (правее вертикали C и выше горизонтали 3, см. рис. 20). Тогда король должен идти по диагонали в правый верхний угол доски. Если в какой-то момент он не сможет сделать такого хода из-за того, что ему встретилась ладья, он сделает ход вправо или вверх и попадет под бой. Если же диагональ свободна от ладей, то король сможет дойти до второго от конца диагонали поля (так же расположенного относительно правого верхнего угла доски, как поле $b2$ расположено относительно левого нижнего угла) за 997 ходов. Ладьи должны за это время успеть перебраться в левую нижнюю часть доски и освободить три правых вертикали и три верхних горизонтали, для чего одной ладье надо минимум два хода (налево и вниз), а всем ладьям – 998 ходов, то есть больше, чем они располагают.

Задача № 5. Семь школьников решили за воскресенье обойти семь кинотеатров. В каждом кинотеатре 8 сеансов – в 9.00, 10.40, 12.20, 14.00, 15.40, 17.20, 19.00 и в 20.40. На каждый сеанс шестеро шли вместе, а кто-нибудь один (не обязательно один и тот же) шел в другой кинотеатр. К вечеру каждый школьник побывал в каждом кинотеатре. Доказать, что в каждом кинотеатре был сеанс, на котором не был ни один из этих школьников.

Решение. Школьники посетят 16 сеансов, так как на каждый из восьми сеансов они идут двумя группами. Так как каждый школьник был в каждом кинотеатре, а все вместе одновременно в один кинотеатр они не ходили, то в каждом кинотеатре, по крайней мере, на двух сеансах был кто-то из них. С другой стороны, если бы в каком-то кинотеатре они посетили все восемь сеансов, а в остальных – всего по два сеанса, то даже тогда они были бы на $8+2\cdot6=20$ сеансах. Противоречие доказывает утверждение задачи.

IX класс

Задача № 1. Число Y получается из натурального числа X некоторой перестановкой цифр. Известно, что $X+Y=10^{200}$. Доказать, что X делится на 50.

Решение. Пусть $X=\overline{x_1x_2\ldots x_{200}}$, $Y=\overline{y_1y_2\ldots y_{200}}$ ж) (первые цифры могут быть и нулями). Так как $X+Y$ оканчивается на нуль, то и $x_{200}+y_{200}$ оканчивается на нуль. Предположим, что ни X, ни Y не делится на 10, то есть что

ж) См. сноску на стр. 48.

$x_{200} \neq 0, y_{200} \neq 0$, тогда $x_{200} + y_{200} = 10$, (так как $0 \leq x_i + y_i \leq 18$ для всех $i = 1, 2, \ldots, 200$), откуда $x_{199} + y_{199} = 9$ (так как $19 > 18$), $x_{198} + y_{198} = 9, \ldots, x_i + y_i = 9$ для всех $i = 1, 2, \ldots, 199$.

Пусть сумма цифр числа X равна S, тогда и сумма цифр числа Y равна S. Имеем:

$$2S = (x_1 + x_2 + \cdots + x_{200}) + (y_1 + y_2 + \cdots + y_{200}) =$$
$$= (x_1 + y_1) + (x_2 + y_2) + \cdots + (x_{199} + y_{199}) + (x_{200} + y_{200}) =$$
$$= 9 \cdot 199 + 10,$$

то есть $2S = 9 \cdot 199 + 10$ (I).

В левой части (I) стоит четное число, а в правой – нечетное. Получили противоречие, откуда следует, что $x_{200} + y_{200} = 0$, то есть и X, и Y делятся на 10.

Пусть $\frac{X}{10} = X_1$, $\frac{Y}{10} = Y_1$. Так как $X + Y = 10^{200}$, то $X_1 + Y_1 = 10^{199}$, причем Y_1 получается из X_1 перестановкой цифр. Докажем, что X_1 и Y_1 делятся на 5. Предположим, что это не так. Тогда X_1 и Y_1 оканчиваются на различные цифры, дающие в сумме 10. Пусть X_1 оканчивается, например, на 3, тогда Y_1 оканчивается на 7.

Среди цифр числа X_1 также должна быть семерка, но в числах X_1 и Y_1 суммы цифр, стоящих в одинаковых разрядах, равна 9 (так же, как и выше), поэтому в числе Y_1 в том разряде где у X_1 стоит 7, должна стоять цифра 2. В числе X_1 также есть цифра 2, соответствующей ей цифрой в числе Y_1 будет снова семерка, и так далее. Получится, что число семерок в числе Y_1 на единицу больше, чем число двоек в числе X_1, а в числе X_1

столько же семерок, сколько двоек в числе Y_1 . Но в X_1 и в Y_1 одинаковое количество двоек, а значит, получилось, что в них разное количество семерок, чего не может быть.

Итак, X_1 и Y_1 оканчиваются либо нулями, либо пятерками, а значит, делятся на 5. Задача решена.

Задача № 2. Дана последовательность целых положительных чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$, все элементы которой не превосходят натурального числа M . Известно, что при всех $k>2$ $x_k = |x_{k-1} - x_{k-2}|$. Какой может быть максимальная длина этой последовательности?

Решение. Так как $x_3 > 0$ и $x_3 = |x_1 - x_2|$, то $x_3 \geq 1$; $x_4 = |x_2 - x_3| \leq x_2 - 1$. Отсюда следует, что ни один член последовательности не может быть больше наибольшего из x_1 и x_2 . Пусть наибольший из них равен M . Рассмотрим несколько случаев.

а). Пусть $x_4 = M-1$. Тогда $x_2 = M$, $x_1 = M-1$,так как если $x_1 = M$, то последовательность оборвется на третьем члене, а если $x_1 < M-1$, то $|x_1 - x_2| \geq 2$, тогда $x_4 = |x_2 - x_3| \leq M-2$. Итак, $x_2 = M$, $x_1 = M-1$, тогда $x_3 = 1$, $x_4 = M-1$, $x_5 = M-2$ и так далее, длина последовательности для $M = 2K$ равна $\frac{3M}{2} + 1 = 2K+1$, а для $M = 2k+1$ – $\left[\frac{3M}{2}\right] + 2 = 3K+3$.*)

б) Пусть $x_4 \leq M-2$. Имеем:

$$x_5 \leq max(x_2, x_3) - 2 \leq M-2 \quad ;$$ **)

---

*) $[m]$ означает целую часть числа m ,то есть наибольшее целое число, не превосходящее m .

**) $max(y_1, y_2)$ означает наибольшее из чисел y_1 , y_2 .

$x_6 < \max(x_4, x_5) \le M-2$. Аналогично все числа из третьей тройки членов последовательности не больше, чем $M-4$, в четвертой – чем $M-6$ и так далее.

Если $M = 2K+1$, то в K-ой тройке все числа не превосходят трех, а $(K+1)$-ая тройка начинается с единицы, но $x_{3(K-1)+3} = |x_{3(K-1)+1} - x_{3(K-1)+2}| \le 2$, так как два предыдущих члена не больше трех, но положительны. Так как $x_{3K+1} = 1$, то $x_{3K+2} \le 1$, и на этом члене последовательность обрывается. Итак, в этом случае число членов не превышает $\left[\frac{3M}{2}\right] + 1 = 3K+2$.

Если $M = 2K$, то, очевидно, длина последовательности не больше, чем $\frac{3M}{2}$.

Задача № 3. На каждой стороне треугольника ABC построено по квадрату во внешнюю сторону. Оказалось, что внешние вершины всех квадратов лежат на одной окружности. Доказать, что треугольник ABC – равнобедренный.

Решение. Центр окружности, проходящей через точки E, D, J, H, G и F, лежит на пересечении перпендикуляров, проведенных через середины сторон ED, JH, GF, а значит, и через середины сторон треугольника ABC, поэтому он совпадает с центром окружности, описанной около треугольника ABC.

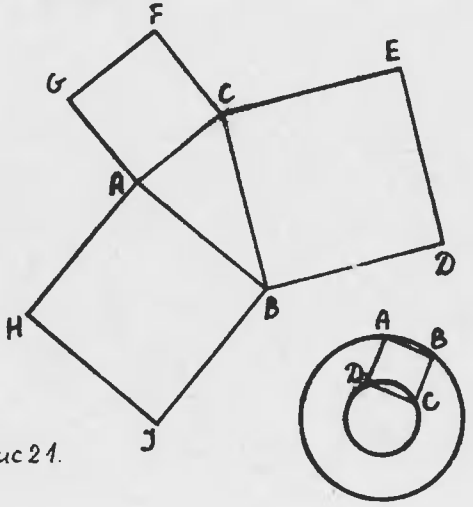


Рис 21.

Теперь сформулируем такую задачу: в кольцо, образованное двумя концентрическими окружностями, надо вписать квадрат так, чтобы на каждой окружности лежало по две его вершины. Докажем, что в каждое такое кольцо можно вписать лишь два различных (то есть отличающихся длинами сторон) квадрата (см. рис. 21.).

Если точку D повернуть на 90^0 относительно точки A, то точка D попадет в точку B. Из этого факта и следует доказательство последнего утверждения. Возьмем произвольную точку на большой окружности и повернем малую окружность вокруг этой точки на 90^0. Большая и повернутая маленькая окружности пересекутся не более, чем в двух точках. Отсюда следует, что если выбранную точку взять за вершину квадрата, то вторая его вершина может быть только в одной из двух точек пересечения окружностей, поэтому длина стороны квадрата может принимать не больше двух значений.

Если теперь предположить, что исходный Δ ABC не является равнобедренным, то получится, что все три квадрата, построенные на его сторонах, различны, поэтому они не могут быть вписаны в кольцо.

Замечание. Отметим, что обратное утверждение к приведенному в условии задачи вовсе не следует из нашего доказательства: если Δ ABC - равнобедренный, то около квадратов, построенных на его сторонах, не всегда можно описать окружность.

Задача № 4. Дано натуральное число a, такое, что для любого натурального числа N, делящегося на a, число $\overleftarrow{N}$ тоже делится на a ($\overleftarrow{N}$ -число, состоящее из тех же цифр, что и N, но записанных в обратном порядке, например, $\overleftarrow{1967} = 7691$ $\overleftarrow{540} = 45$ и т.п.). Доказать, что число a является

делителем числа 99.

Решение. Подберем число N так, чтобы оно делилось на a и имело вид $N = \overline{\alpha 0005000\beta}$,ж) где α и β – не обязательно однозначные числа. Это всегда можно сделать: α выберем произвольно, тогда остаток от деления β на α определен однозначно (заметим, что само β можно выбрать многими способами). Тогда $\overleftarrow{N} = \overleftarrow{\beta}\,000\,5\,000\overleftarrow{\alpha}$. Выберем $\alpha = 10\ldots0$, причем нулей в α возьмем столько, чтобы в числах N и $\overleftarrow{N}$ пятерка стояла на одном и том же месте, а β – так, чтобы его последняя цифра не равнялась 9 (это всегда можно сделать).

Имеем: $N+\overleftarrow{N}$ делится на a , $N+\overleftarrow{N} = (\overleftarrow{\beta+1})\,0010000\,(\beta+1)$. По условию, $N+\overleftarrow{N}$ также делится на a , $N+\overleftarrow{N} = (\beta+1)\,0000100\,(\beta+1)$. Разность чисел $(N+\overleftarrow{N})$ и $(N+\overleftarrow{N})$ поэтому тоже делится на a и равна $9900\ldots0$, а число, записанное теми же цифрами, что и разность, но взятыми в обратном порядке, которое тоже делится на a , равно 99. Отсюда и следует, что a – делитель числа 99.

Задача № 5. Испанский король решил перевесить по-новому портреты своих предшественников в круглой башне Замка. Он хочет, чтобы за один раз меняли только два портрета, висящие рядом, причем это не должны быть портреты двух королей, один из которых царствовал сразу после другого. Кроме того, ему важно лишь взаим-

---

ж) см. сноску на стр. 48.

ное расположение портретов, и два расположения, отличающиеся поворотом круга, он считает одинаковыми. Доказать, что, как бы сначала ни висели портреты, король сможет по этим правилам добиться любого нового их расположения.

Решение. Если мы перешли от одного расположения портретов к другому, то сможем перейти и от второго к первому, проделав все операции в обратном порядке. Поэтому достаточно доказать, что от любого расположения портретов можно перейти к какому-нибудь определенному, например, к такому, когда все портреты висят по порядку: сначала первый, потом - второй, затем - третий и т.д. по часовой стрелке. Для этого возьмем первый портрет и будем двигать его по часовой стрелке до тех пор, пока не доберемся до второго портрета. После этого будем двигать первый и второй портрет вместе по часовой стрелке до тех пор, пока не доберемся до третьего портрета (каждый портрет будем менять местами сначала со вторым портретом, потом с первым, после чего первый и второй портрет опять окажутся рядом), затем все три портрета будем двигать до четвертого и т.д.

X класс

Задача № I. Дана таблица $n \times n$ клеток, заполненная следующим образом. Пусть в некоторой строчке записаны числа $a_1, \ldots, a_k, a_{k+1}, \ldots, a_m, a_{m+1}, \ldots, a_n$ (m и $n-k$ - взаимно-простые числа). Тогда в следующей строчке записываются те же числа, но в таком порядке: $a_{m+1}, \ldots, a_n, a_{k+1}, \ldots, a_m, a_1, \ldots a_k$. В первую строчку записываются числа $1, 2, \ldots, n$.

Доказать, что после заполнения таблицы в каждом столбце будут за-

писаны все числа от I до n.

Решение. Припишем к данным числам $a_1, \ldots, a_n$ еще $(m-k)$ чисел $a_{n+1}, \ldots, a_{n+m-k}$. Получим последовательность длины $m+n-k$; рассмотрим циклический сдвиг этой последовательности на $(n-k)$ (циклическим сдвигом на I последовательности a_1, a_2, a_3, a_4 называется сдвиг, переводящий эту последовательность в такую: a_4, a_1, a_2, a_3; сдвиг на 2 переводит ее в a_3, a_4, a_1, a_2 и т.п.). Так числа m и $(n-k)$ взаимно просты, то и числа $(m+n-k)$ и $(n-k)$ взаимно просты, поэтому после нескольких сдвигов на $(n-k)$ каждое число побывает на каждом месте.

Легко видеть, что при сдвиге новой последовательности числа $a_1, \ldots, a_n$ преобразуются так же, как и в таблице, только может случиться, что они попадут на места, идущие после n-ого, но тогда повторное преобразование передвинет их туда, куда нужно. Отсюда и следует утверждение задачи.

Задача № 2. См. задачу № 3 для IX класса.

Задача № 3. Можно ли расставить по окружности числа $1, 2, 3, \ldots, 12$ так, чтобы разность между любыми двумя рядом стоящими числами равнялась 3,4 или 5?

Решение. Рядом с числом I могут стоять только числа 4,5 или 6; с двойкой - 5,6 или 7; с тройкой - 6,7,8; с десятью - 5, 6 или 7; с одиннадцатью - 6,7 или 8; с двенадцатью - 7,8 или 9.

Итак, соседями чисел I,2,3,I0,II,I2 могут быть только числа 4,5,6,7,8,9. В каждой из этих групп по 6 чисел, причем каждое из чисел первой группы может иметь соседей только из второй группы, поэтому числа из групп должны чередоваться. Но число 4

может иметь рядом только числа I,7,8 или 9, то есть хотя бы один из его соседей будет из той же группы, что и само число 4, что невозможно.

Задача № 4. В восьми данных точках пространства установлено по прожектору, каждый из которых может осветить в пространстве октант (трехгранный угол со взаимно-перпендикулярными сторонами и с вершиной в точке, где находится прожектор). Доказать, что можно повернуть прожекторы так, чтобы они осветили все пространство.

Решение. Введем в пространстве систему координат со взаимно-перпендикулярными осями и повернем прожекторы так, чтобы ребра освещаемых ими октантов все были параллельны осям координат.

В пространстве найдется плоскость M, параллельная плоскости XOY, выше которой лежит не более четырех прожекторов и ниже которой - тоже не более четырех (доказательство аналогично проведенному в задаче № 5 для УП класса). Прожекторы, расположенные выше плоскости M, направим так, чтобы они освещали полупространство под M, а расположенные ниже M - чтобы они освещали полупространство над M. Прожекторы, лежащие на плоскости M, повернем так, чтобы вверх и вниз светило ровно по 4 прожектора.

Будем поворачивать теперь прожекторы так, чтобы оставались на месте ребра освещаемых ими октантов, параллельные оси OZ. На плоскости M каждый прожектор освещает прямой угол со сторонами, параллельными осям OX и OY. Добившись того, чтобы каждая из четверок прожекторов освещала всю плоскость, мы добьемся освещения всего пространства. Тем самым задача сведена к за-

даче № 5 для УП класса.

Задача № 5. Рассматриваются всевозможные n-значные числа, составленные из цифр I,2,3. В конце каждого числа приписывается цифра I,2 или 3 так, что к двум числам, у которых во всех разрядах стоят разные цифры, приписываются тоже разные цифры. Доказать, что найдется n-значное число, в записи которого лишь на одном месте стоит единица и к которому приписана единица.

Решение. Обозначим все числа, в запись которых входит лишь одна единица, двойками и тройками (это то, что к ним приписано). Пусть n-нечетное число.

Числа	Обозначения
I 2 2 ... 2 2	2
2 I 3 ... 3 3	3
3 3 I ... 2 2	2
2 2 2 ... 3 3	3
. . . . .	
2 2 2 ... I 3	3
3 3 3 ... 3 I	2

У чисел 3 3 3 ... 3 I и I 2 ... 2 2 все цифры различны, а они обозначены одной и той же цифрой, следовательно, при нечетном n найдется число, в записи которого участвует лишь единица и к которому приписана единица.

Пусть теперь n-четное число. Тогда выписанный столбец кончится так:

3 3 ... 3 I 2	2
2 2 ... 2 2 I	3

Но число 3 I 3 ... 3 во всех разрядах отличается от чисел 22...2I и I2 ... 2, поэтому к нему нельзя приписать ни 2, ни 3. Задача решена.

ГОТОВИМСЯ В ВУЗ

По традиции мы публикуем материалы вступительных экзаменов в ведущие вузы страны.

Ниже приведено несколько вариантов письменного экзамена по математике, предлагавшегося летом 1967 года. Варианты №№ I – 4 предлагались на отделении экономической кибернетики экономического факультета МГУ, вариант № 5 – на химическом, а варианты №№ 6,7 – на геофаке МГУ. Варианты №№ 8–II предлагались в Московском физико-техническом институте. В МГУ на экзамен отводилось 4, а в МФТИ – 5 астрономических часов.

Вариант № I

I. Квадрат целого положительного простого числа N делится (с остатком) на три, полученное неполное частное делится (без остатка), на три, частное вновь (с остатком) делится на три, и, наконец, полученное неполное частное опять с остатком делится на три и дает в результате I6. Найти N .

2. Решить неравенство: $\log_{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}(x^2-3x+1)\geq 0$.

3. Описать все треугольники, у которых стороны составляют арифметическую прогрессию, а углы тоже составляют арифметическую прогресоию.

4. Решить уравнение:

$$2\sqrt{2}\,(\sin x+\cos x)\cos y = 3+\cos 3y.$$

Вариант № 2

I. Квадрат целого положительного числа N, увеличенный на девять, делится без остатка на неполное частное от деления числа N на три и дает в частном 130. Найти N.

2. Решить неравенство:

$$\log_{x+\frac{1}{x}}\left(x^2+\frac{1}{x^2}-4\right)\geq 1.$$

3. В треугольнике ABC $\angle A:\angle B:\angle C=4:2:1$. Доказать, что для сторон этого треугольника справедливо равенство:

$$\frac{1}{BC}+\frac{1}{AC}=\frac{1}{AB}.$$

4. Решить уравнение:

$$tg^2x+2tgx(\sin y+\cos y)+2=0$$

Вариант № 3

I. Квадрат целого положительного числа N, увеличенный на два, делится без остатка на неполное частное от деления N на четыре и дает в результате 201. Найти N.

2. Решить неравенство: $\log_{\frac{3x}{x^2+1}}\left(x^2-\frac{5}{2}x+1\right)\geq 0$

3. Описать все треугольники, у которых стороны составляют геометрическую прогрессию, а углы – арифметическую.

4. Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} tg^2x + ctg^2x = 2\sin^2 y, \\ \sin^2 y + \cos^2 z = 1. \end{cases}$$

Вариант № 4

I. Найти решения системы уравнений:

$$\begin{cases} \log_2 x \cdot \log_2 y + 1 = 0, \\ \sin x \cdot \cos y = 1 - \cos x \sin y, \end{cases}$$

удовлетворяющие условию $x+y<8$.

2. Решить неравенство:

$$\log_{(1+x-x^2)} 3 \leq 2 \log_{\frac{1}{8}} (2\sqrt{2}).$$

3. Найти все решения уравнения:

$$\sin(5\pi \cdot 2^x) + \sin(\pi \cdot 2^x) - 2\sin(3\pi \cdot 2^x) =$$
$$= 8\sin^2(\pi \cdot 2^x) + 2\cos(3\pi \cdot 2^x) - \cos(\pi \cdot 2^x) - \cos(5\pi \cdot 2^x).$$

4. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ с вершиной S сторона основания равна a , а плоские углы при вершине равны 30°. Через точку A и середину ребра SB проведена плоскость, которая делит пирамиду на две равные по объему части. Найти отрезки, на которые эта плоскость делит высоту пирамиды.

Вариант № 5

I. Из пункта A в пункт B , находящийся на расстоянии 100 км от пункта A , в один и тот же момент времени выехал

велосипедист и вышел пешеход. Одновременно с ними им навстречу из пункта B выехал автомобилист. Через час после начала движения автомобилист встретил велосипедиста и затем, проехав еще $14\frac{2}{17}$ км, встретил пешехода, посадил его на машину, после чего они отправились вдогонку за велосипедистом и нагнали его. Вычислить скорости, с которыми двигались велосипедист и автомобилист, если известно, что скорость пешехода равна $5\ \frac{км}{час}$. Время, необходимое на посадку пешехода и на разворот автомобиля, считать равным нулю.

2. Решить уравнение:

$$tg\left(\frac{\pi}{2}\cos x\right) - ctg(\pi \sin x) = 0.$$

3. В треугольнике ABC из вершины A проведена прямая, пересекающая сторону BC в точке Д, находящейся между точками B и C, причем $\frac{CД}{BC} = \alpha\ \left(\alpha < \frac{1}{2}\right)$. На стороне BC между точками B и Д взята точка E и через нее проведена прямая, параллельная стороне AC и пересекающая сторону AB в точке F. Найти отношение площадей трапеции $ACEF$ и треугольника $АДС$, если известно, что $CD = DE$.

4. Решить неравенство:

$$\sqrt{tgx-1}\left[\log_{tgx}(2+4\cos^2 x) - 2\right] \geq 0.$$

Вариант № 6

I. Два мальчика стартовали по беговой дорожке длиной 50 м с интервалом в I сек. Мальчик, стартовавший вторым, догнал первого в десяти метрах от линии старта, добежал до линии финиша и с той же скоростью побежал обратно. На каком расстоянии от линии

финиша он встретил первого мальчика на своем обратном пути, если известно, что эта встреча произошла через 10 сек. после старта первого мальчика?

2. Решить неравенство:

$$\log_4(2x^2+x+1) - \log_2(2x-1) \le -\operatorname{tg}\frac{7\pi}{4}.$$

3. Найти все решения уравнения:

$$2\cos^2 x + \log_{\sqrt{3}}\left(27^{\cos^2 x} - 3^{\sin^2 x}\right) = \frac{2}{\log_{12} 3} + \log_9\left(3^{0{,}5+\cos 2x} - 1\right)^4.$$

4. Через сторону основания правильной треугольной пирамиды и центр вписанного в нее шара проведена плоскость. В каком отношении эта плоскость делит объем пирамиды, если ее боковое ребро в 3,5 раза больше стороны основания?

Вариант № 7

1. Решить уравнение:

$$\log_2(x-2) - \log_{\frac{1}{2}}(x+4) = 4.$$

2. Решить уравнение:

$$\sin^2\frac{x}{2} - \sin^2 x + \cos x = 0$$

3. Решить неравенство:

$$\sqrt{x^2-x-2} < x-1.$$

4. В прямоугольном треугольнике ABC угол A равен $\frac{\pi}{3}$, а радиус окружности, касающейся катета BC и продолжения сторон AB и AC, равен R. Найти длину AB.

Вариант № 8

I Решить уравнение:

$$\sin^7 x \cos^3 x - \cos^7 x \sin^3 x = \cos 2x .$$

2. Окружности радиусов R и r $(r < \frac{R}{2})$ имеют внутреннее касание в точке A. Через центр большей окружности проведен диаметр BC, касающийся меньшей окружности. Найти площадь треугольника ABC.

3. Русло реки разветвляется на два протока с разными скоростями течения. На развилке расположен пункт A. Лодка на пути по первому протоку из пункта A в пункт B затрачивает на 2I мин. меньше, чем на путь по второму протоку из пункта A в пункт C. Известно, что расстояние от A до B равно расстоянию от A до C. На обратный путь из B в A лодка затрачивает на I час IO мин больше, чем на путь из C в A. Если бы скорость лодки в стоячей воде была в 2 раза больше, то на путь из B в A она затратила бы на I2 мин. больше, чем на путь из C в A. За какое время лодка проплывет от A до B в стоячей воде?

4. В основании прямоугольного параллелепипеда $ABCDA'B'C'D'$ лежит квадрат со стороной 5 см. Высота параллелепипеда – 4 см. В трехгранные углы при вершинах A и C' вписаны равные касающиеся друг друга шары. Третий шар касается двух первых и бокового ребра BB' параллелепипеда в его середине. Найти радиусы шаров (найти все решения).

Вариант № 8

I. Решить уравнение: $\dfrac{3\sqrt{3}\cos 2x + 3\sin 2x}{\sqrt{3}\cos x + \sin x} = 4\cos x - \dfrac{1}{\cos x}$.

2. В равнобедренной трапеции $ABCD$ основания AD и BC связаны равенством $AD=(1+\sqrt{5})BC$. Построена окружность с центром в точке C радиуса $\frac{2}{3}BC$, высекающая на основании AD хорду EF длины $\frac{1}{3}\sqrt{7}\,BC$. В каком отношении окружность делит сторону CD?

3. В правильной четырехугольной усеченной пирамиде проведено сечение через диагонали оснований и сечение, проходящее через сторону нижнего основания и противоположную сторону верхнего основания. Угол между секущими плоскостями равен α. Найти отношение площадей сечений.

4. Найти все вещественные решения системы уравнений (радикалы – арифметические):

$$\begin{cases} \frac{x^2}{y^2} - 2\sqrt{x^2-1} + y^2 = 3, \\ 3(x-y) + \frac{2y}{\sqrt{x^2-1}-x} + 3y^2 = 0. \end{cases}$$

Вариант № 9

I. Решить уравнение:

$$1 - \sin 10x = 2\sin^2 18x.$$

2. Основания равнобочной трапеции относятся как 3:2. На большем осиовании как на диаметре построена окружность, высекающая на верхнем основании отрезок, равный половине этого основания. В каком отношении окружность делит боковые стороны трапеции?

3. В правильной четырехугольной усеченной пирамиде $ABCDA'B'C'D'$ проведено два сечения $AA'C'C$ и $ABC'D'$. Первое сечение имеет площадь S_1, второе – площадь S_2. Найти площадь сечения, проходящего через середину высоты параллельно основаниям.

4. Найти все вещественные решения системы уравнений (радикалы – арифметические):

$$\begin{cases} \frac{x^2}{y^2} + 2\sqrt{x^2+1} + y^2 = 3, \\ x + \frac{y}{\sqrt{x^2+1}+x} + y^2 = 0. \end{cases}$$

Вариант № 10

I. Решить уравнение:

$$3\,\frac{1+\operatorname{tg}x}{1-\operatorname{tg}x} = 2\cos^2 x - 1.$$

2. В равнобедренном треугольнике ABC, у которого $AB=BC$ и угол B равен $\frac{\pi}{4}$, опущен перпендикуляр AD на сторону BC. В треугольники ABD и ADC вписаны полуокружности так, что их диаметры лежат соответственно на BD и AD. Определить отношение площадей построенных полукругов.

3. На берегу реки по ее течению расположены два пункта, A и B, а на полпути между ними в реку впадает приток, в устье которого находится пункт C. Лодка на путь из B в A затрачивает 3,5 часа, а на обратный путь – I час 25 мин. Пусть из B в C и затем вверх по притоку на такое же расстояние до пункта D она проходит за 4 часа. За какое время лодка проплывет из D в B, если этот путь в стоячей воде отнял бы у нее 2 часа? (Скорость течения реки после впадения притока уменьшается).

4. В основании пирамиды $SABC$, у которой все углы при вершине S прямые, лежит равнобедренный треугольник: $AC=BC$. Ребро SC наклонено к плоскости основания ABC под углом $\frac{\pi}{4}$.

На ребре AB , как на диаметре, построена сфера радиуса R . Найти радиус сферы, вписанной в трехгранный угол при вершине C и касающейся данной сферы. (Найти все решения).

Билет № II

I. Решить уравнение:

$$\sin 4x - \sin 3x - 2\sin 2x + 3\sin x = 0.$$

2. Прямоугольный треугольник с острым углом α расположен внутри окружности радиуса R так, что гипотенуза треугольника является хордой окружности, а вершина прямого угла треугольника лежит на диаметре, параллельном гипотенузе. Найти площадь этого треугольника.

3. Образующая усеченного конуса, равная $r\sqrt{2}$, наклонена к плоскости основания под углом $\alpha = \frac{\pi}{4}$, а радиус верхнего основания усеченного конуса равен r . Найти радиус шара, описанного около этого конуса.

4. Найти все решения системы уравнений:

$$\begin{cases} 3x_1x_2 = x_1 + x_2 + 2, \\ 3x_2x_3 = x_2 + x_3 + 2, \\ \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \\ 3x_{n-1}x_n = x_{n-1} + x_n + 2, \\ 3x_nx_1 = x_n + x_1 + 2. \end{cases}$$

ПОДП. К ПЕЧАТИ 29/1У-68 Г. Л-95709. Ф.60x90/16
ФИЗ.П.Л. 4,5. УЧ.-ИЗД.Л. 2,65. ЗАК. 1425. ТИР. 1000
ЦЕНА 7 КОП.

ОТП. НА РОТАПРИНТАХ В ТИП. ИЗД-ВА МГУ
МОСКВА, ЛЕНГОРЫ.